

# Antybilard

Rafał KOŁODZIEJ

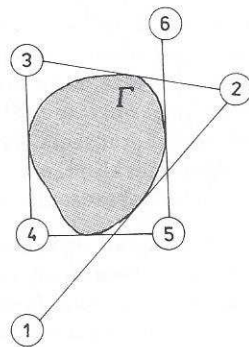
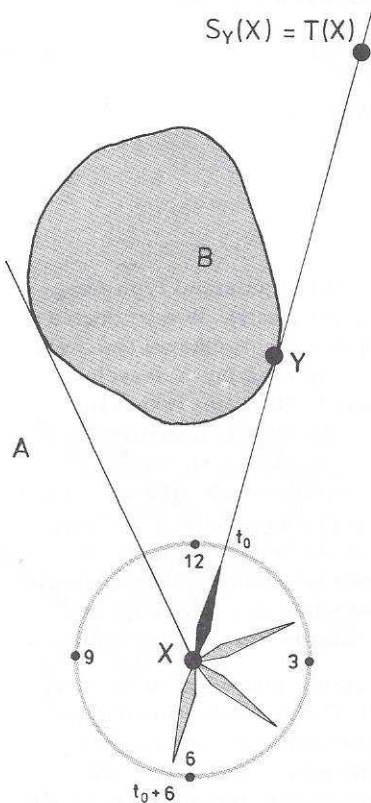
Ruch wszystkich ciał Układu Słonecznego można opisać układem równań różniczkowych. Układ taki ma jednoznaczne rozwiązanie, tzn. jeśli ustalimy precyzyjnie położenia i prędkości planet oraz Słońca w dowolnej chwili, to cała jego przeszłość i przyszłość są zdeterminowane. Więcej, za pomocą doskonałego rachmistrza potrafilibyśmy je obliczyć. Kłopot polega na tym, że rozwiązania, choć istnieją, nie są podane w dobrej dla rachunków postaci dla, niestety, niedoskonałych rachmistrzów, jakimi są na przykład komputery. Dlatego nie potrafimy odpowiedzieć na pytanie, czy pewna konfiguracja planet Układu Słonecznego, nieznacznie odbiegająca od istniejącej u zarania dziejów, tzn., jak myślę, 3 000 000 000 lat 3 miesiące 2 dni 5 godzin 13 minut i 54 sekundy temu, wywołałaby katastrofę kosmiczną (i w konsekwencji na Ziemi nie powstałoby życie). Ten rodzaj pytania nazywamy pytaniem o stabilność układu i byłoby pocieszające uzyskać w przypadku Układu Słonecznego odpowiedź negatywną.

Między innymi próba odpowiedzi na to pytanie doprowadziła do powstania tzw. teorii układów dynamicznych, które z racji swej ogólności opisują znacznie szerszą klasę zjawisk niż tylko ewolucja Układu Słonecznego. Zanim powiemy, co to jest układ dynamiczny, przyjrzyjmy się jeszcze przez chwilę Układowi Słonecznemu. Stan Układu Słonecznego możemy jednoznacznie opisać podając składowe położenia i prędkości wszystkich planet i Słońca (jest to, oczywiście, opis przybliżony, bo np. zaniedbujemy księżyce). Na każdą planetę (Słońce) przypada więc sześć liczb. Wobec tego stan Układu opisany jest przez podanie 60. liczb. A układ 60. liczb to nic innego tylko punkt w 60-wymiarowej przestrzeni. Układ Słoneczny ewoluje w czasie, owe 60 liczb opisujące Układ zmieniają się, co oznacza, że ów punkt w 60-wymiarowej przestrzeni porusza się. Zamiast więc badać ewolucję Układu Słonecznego wystarczy badać ruch jednego punktu. Ewolucję Układu Słonecznego możemy zatem opisać tak: mamy 60-wymiarowy zbiór, każdy punkt tego zbioru odpowiada ustalonej konfiguracji położenia i prędkości, punkty tego zbioru podlegają nieustannemu ruchowi – zgodnie z prawami wynikającymi z równań mechaniki.

Mówiąc bardzo nieściśle: układ dynamiczny to pewien zbiór, którego punkty podlegają ewolucji zgodnie z pewnymi zasadami. Jak zauważyliśmy, Układ Słoneczny może być opisany za pomocą układu dynamicznego. Układy dynamiczne mogą być wykorzystane do opisu znacznie szerszej klasy zjawisk ewolucyjnych (stosują się nawet w biologii, medycynie...).

W przypadku Układu Słonecznego stan układu zmienia się w czasie w sposób ciągły. Można też rozpatrywać układy dynamiczne, które ewoluują w sposób skokowy. W latach 60. B.H. Newman podał ciekawy przykład takiego układu dynamicznego – antybilard. Jest to pewne przekształcenie  $T$  podzbioru płaszczyzny (zaraz opiszemy, jakie). Kolejne stany ewolucji punktu  $X$ , to wyrazy ciągu  $X, T(X), (T \circ T)(X) \dots$  zwanego trajekcją punktu  $X$ . Jeżeli trajektoria punktu  $X$  zawarta jest w ograniczonym podzbiore płaszczyzny, to punkt  $X$  ewoluuje tak, że jego współrzędne (opisujące stan układu) są cały czas ograniczone – nie ulegają wielkim zmianom. To zaś oznacza, że układ nie ulega katastrofie. Pytaniem o stabilność antybilardu jest więc pytanie, czy trajektoria dowolnego punktu jest zawarta w zbiorze ograniczonym. Pytanie to w jakimś stopniu jest podobne do pytania o stabilność Układu Słonecznego.

Czas przedstawić bohatera opowieści, czyli antybilard. Rozważmy na płaszczyźnie wypukłą, zamkniętą krzywą  $\Gamma$ , ograniczającą zbiór wypukły  $B$ , która nie zawiera żadnego odcinka. Krzywa  $\Gamma$  dzieli płaszczyznę na dwa zbiory:  $B$  oraz  $A$ . Zdefiniujmy przekształcenie  $T: A \rightarrow A$ . Z punktu  $X \in A$  można poprowadzić dwie półproste, z których każda ma dokładnie jeden punkt wspólny z  $\Gamma$  (rys. 1). Aby wybrać jedną z nich, wyobraźmy sobie zegar o środku w punkcie  $X$  z długimi wskazówkami, którymi będą półproste. Dla pewnego czasu  $t_0$  wskazówka jest styczna do  $\Gamma$  w punkcie  $Y$ , a przez następne 6 godzin nie ma z  $\Gamma$  punktów wspólnych.

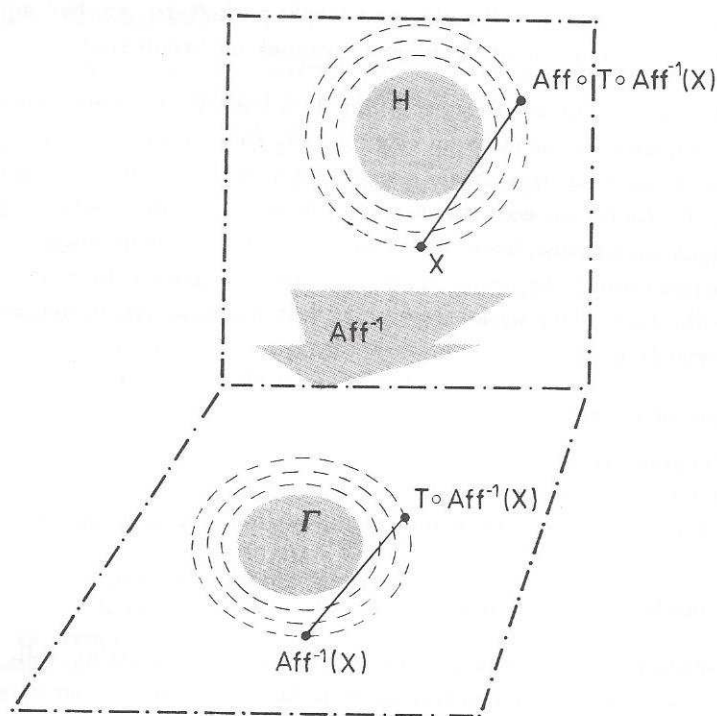


Rys. 1

Zdefiniujemy przekształcenie *antybilard*  $T$ , jako symetrię punktu  $X$  względem punktu  $Y$ , czyli  $T(X) = S_Y(X)$ , gdzie  $S_Y$  oznacza symetrię względem punktu  $Y$ .

### Przykłady

1) W przypadku, gdy  $\Gamma$  jest okręgiem, przekształcenie  $T$  obraca okrąg  $\Gamma_1$  współśrodkowy z  $\Gamma$  o kąt  $\alpha = 2 \arccos(R/R')$ , gdzie  $R$  i  $R'$  oznaczają odpowiednio promienie okręgów  $\Gamma$  i  $\Gamma_1$ .  $\diamond$  (Znaczek  $\diamond$  sugeruje uważnemu Czytelnikowi, że może sprawdzić prawdziwość twierdzenia, na przykład z piórem w ręku).



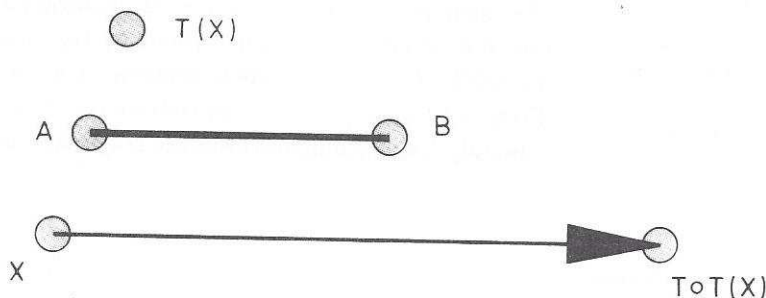
Rys. 2

2) Podobnie prosty opis dostajemy w przypadku, gdy  $\Gamma$  jest elipsą. Wówczas, aby zrozumieć jak działa przekształcenie  $T$ , warto rozpatrzyć przekształcenie afiniczne  $Aff$  (na przykład rzut równoległy jednej płaszczyzny na drugą), które elipsę  $\Gamma$  przekształca na okrąg  $H$ . Ponieważ przekształcenie afiniczne przekształca proste na proste, zachowuje środek odcinka i obrazy figur ograniczonych są ograniczone, możemy analizować przekształcenie  $Aff \circ T \circ Aff^{-1}$  zamiast  $T$  (rys. 2).

Przekształcenie  $Aff \circ T \circ Aff^{-1}$  nazywamy sprzężonym do  $T$ . Ponieważ  $Aff \circ T \circ Aff^{-1}$  zostało opisane w 1), więc zachowuje ono okręgi współśrodkowe z  $H$ . Wobec tego  $T$  zachowuje elipsy otrzymane z  $\Gamma$  przez jednokładność o skali  $k > 1$  i środka w środku  $\Gamma$  (rys. 2). W obu przypadkach trajektorie  $T$  są ograniczone, bo są zawarte w okręgach lub elipsach.

Ciekawsza jest sytuacja, gdy  $\Gamma$  jest wielokątem. Wówczas przekształcenie  $T$  jest określone tylko dla punktów, które nie należą do prostych zawierających boki  $\Gamma$ . W tej sytuacji, aby istniała trajektoria punktu  $X$  ( $\{X, T(X), T \circ T(X), \dots\}$ ), żaden obraz punktu  $X$  nie może należeć do prostej zawierającej bok wielokąta  $\Gamma$ . Okazuje się, że tak jest dla dużego podzbioru  $C$  zbioru  $A$ , (tzw. podzbioru pełnej miary Lebesgue'a). Czasami można powiedzieć coś więcej o kształcie tego zbioru. W dalszym ciągu będziemy rozważali  $T$  dla punktów należących do  $C$ .

3)  $\Gamma$  jest odcinkiem  $AB$ . W zależności od tego, po której stronie prostej  $AB$  leży punkt  $X$ , przekształcenie  $T$  jest przesunięciem o wektor  $2\vec{AB}$  lub  $-2\vec{AB}$ , gdyż wiadomo, że  $S_A \circ S_B = 2\vec{AB}$  i  $S_B \circ S_A = -2\vec{AB}$ .  $\diamond$  Jest to jedyny znany przypadek, w którym trajektorie  $T$  nie są ograniczone. W tym przypadku ciąg punktów  $X, T(X), T \circ T(X), \dots$  nie jest ograniczony (rys. 3) dla żadnego  $X$ .  $\diamond$



Rys. 3

**Rozwiązanie zadania F 370.**

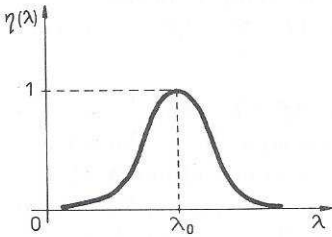
Z założenia zadania moc promieniowania źródła światła o długości 555 nm jest taka sama jak moc promieniowania Słońca i wynosi  $\sigma T^4$ , gdzie  $\sigma = 5,7 \times 10^{-5} \text{ erg/s cm}^2/\text{K}^4$  oznacza stałą Stefana-Boltzmana, a  $T$  jest temperaturą powierzchni Słońca wyrażoną w kelwinach. Szukany ułamek energii promieniowania będzie równy:

$$q = \frac{\int I(\lambda) \cdot \eta(\lambda) d\lambda}{\sigma T^4 \cdot \eta(\lambda_0)}$$

przy czym  $\eta(\lambda_0) = 1$ . Całkę w liczniku możemy obliczyć w przybliżeniu

$$\int I(\lambda) \cdot \eta(\lambda) d\lambda = I(\lambda_0) \int_0^{\infty} \eta(\lambda) d\lambda.$$

Ponieważ krzywa czułości ludzkiego oka ma kształt dzwonowy,



nie popełniamy dużego błędu rozciągając granice całkowania

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \eta(\lambda) d\lambda &\approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda_0)\alpha} d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Ponieważ  $e^{-(\Delta\lambda/2)^2\alpha} = 1/2$ , więc  $\alpha = \frac{4 \ln 2}{(\Delta\lambda)^2}$ . Ostatecznie otrzymujemy

$$q = \frac{\pi^{3/2} h c^2 \Delta\lambda}{\sigma T^4 \lambda_0^5 \left( e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right) \sqrt{\ln 2}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $q \approx 14\%$ .

Zbiór  $C$  jest zbiorem tych punktów płaszczyzny, które nie należą do prostej  $AB$ .

4)  $\Gamma$  jest trójkątem. Najpierw stosując „sztukę” podobną do tej z rysunku 2, możemy przyjąć, że  $\Gamma$  jest trójkątem równobocznym. Osiągniemy to po zrzutowaniu trójkąta  $\Gamma$  tak, aby jego obraz był trójkątem równobocznym.  $\diamond$  Płaszczyznę pokrywamy trójkątami przystającymi do  $\Gamma$  otrzymując tzw. parkietaż (rysunek na okładce). Klepki parkietażu przekształcane przez  $T$  przechodzą na siebie w okresowy sposób.  $\diamond$  Zadziwiające! Zbiór  $C$  jest zbiorem punktów nie leżących na krawędziach parkietażu.  $\diamond$

5)  $\Gamma$  jest równoległobokiem. I tu, jak poprzednio, można założyć, że równoległobok jest kwadratem. Kwadratowe klepki parkietażu, po, być może, wielu odbiciach, powracają na swoje miejsce (rysunek na okładce).  $\diamond$

6) Pięciokąt foremny i inne wielokąty foremne dają bardziej skomplikowane obrazki, choć trajektorie są w dalszym ciągu ograniczone, a niektóre na pewno okresowe. Powracające na swoje miejsce wielokąty tylko czasami są pięciokątami podobnymi do  $\Gamma$ . Zachęcam wszystkich mających komputer do zbadania sytuacji i zobaczenia tych wielokątów, które okresowo powracają na swoje miejsce. Sytuacja taka jest typowa, co tłumaczy twierdzenie i komentarz do niego. Wiadomo, że dla dużej klasy wielokątów układ jest stabilny, dokładniej, zachodzi następujące twierdzenie:

*Jeżeli spełnione są warunki:*

- i) *Wielokąt  $G$  jest wypukły,*
- ii)  *$G$  nie ma boków równoległych i*
- iii) *wszystkie równoległoboki lokalnie minimalne zawierające  $G$  mają pola wymierne,*

*to wszystkie trajektorie  $T$  są ograniczone.*

Mówimy, że równoległobok  $\Pi$  zawierający  $G$  jest lokalnie minimalny, jeśli istnieje takie  $\varepsilon > 0$ , że dla każdego równoległoboku  $\Pi'$  również zawierającego  $G$ , którego wszystkie wierzchołki są odległe od odpowiednich wierzchołków równoległoboku  $\Pi$  nie więcej niż  $\varepsilon > 0$ , mamy  $\text{pole}(\Pi) \leq \text{pole}(\Pi')$ .

Każdy wielokąt  $G_1$ , który spełnia warunki i), ii) i ma wszystkie współrzędne wierzchołków wymierne, spełnia warunek iii). Jest tak, ponieważ każdy bok równoległoboku minimalnego zawiera co najmniej jeden wierzchołek  $G_1$  oraz jest równoległy do pewnego boku wielokąta  $G_1$ .  $\diamond$  Zatem współrzędne wierzchołków równoległoboku są wymierne.  $\diamond$  Wobec tego pola również.  $\diamond$

Wiadomo, że pięciokąt foremny nie ma wszystkich współrzędnych wierzchołków wymiernych, ponieważ stosunek długości boku do długości przekątnej jest równy złotemu stosunkowi, czyli  $(-1 + \sqrt{5})/2$ .  $\diamond$

Ciekawy jest, moim zdaniem, dowód twierdzenia. Konstruuje się pierścień niezmienniczy złożony z wielokątów przystających do  $\Gamma$  (rysunek na okładce). Niezmienniczy, to znaczy taki, że trajektorie punktów z tego pierścienia cały czas leżą w tym pierścieniu. Wielokąty tego pierścienia przechodzą okresowo na siebie, więcej, wszystkie trajektorie są w całości po jednej stronie pierścienia. Teraz wystarczy wskazać całą rodzinę coraz to większych pierścieni, aby powstały bariery uniemożliwiające trajektorii uciekanie do nieskończoności.