Chaos jest wszędzie

Tomasz KWAST

Słowo *chaos* w potocznym rozumieniu oznacza bałagan, brak prawidłowości. Dla matematyka, a pośrednio też dla fizyka lub astronoma, oznacza ono coś jeszcze. Pojęcie to powstało przy próbach nowego spojrzenia na takie układy fizyczne, które – mówiąc w uproszczeniu – startując z bardzo podobnych warunków początkowych osiągają bardzo różne stany końcowe. Takie zjawisko jest znane od dawna, ale impuls nowym badaniom dało odkrycie w latach 60. przez meteorologa Edwarda Lorenza z Massachusetts Institute of Technology niepokojącego faktu. Wykonując mianowicie komputerowe symulacje klimatu stwierdził, że małym zmianom parametrów modelu (ciśnienia atmosferycznego, prędkości wiatru itd.) mogą odpowiadać duże zmiany końcowego rozkładu pogody. Było to tym dziwniejsze, że równania opisujące model zostały uprzednio tak uproszczone, że ich rozwiązania powinny zachowywać się „porządnie".

Zauważmy jednak, że coś takiego można zaobserwować w zachowaniu już zaledwie dwóch punktów materialnych działających na siebie siłami grawitacji lub elektrostatycznymi. Jeden z nich puszczony ku drugiemu z daleka minie go po hiperboli, ale wystarczy bardzo mała zmiana początkowego kierunku ruchu lub punktu startowego, by hiperbola wygięta była w zupełnie inną stronę. Takie właśnie rozpraszanie cząstek α na folii metalowej Rutherford wytłumaczył istnieniem jąder atomowych. W mechanice gazów lub układów gwiazdowych zjawisko to prowadzi do „mieszania", relaksacji, a ostatecznie do osiągania stanu równowagi.

Ogólnie biorąc chaos pojawia się w zagadnieniach dynamiki, gdy równania opisujące zjawisko są nieliniowe. Poeksperymentujmy z bardzo prostym modelem jakiejś fikcyjnej populacji. Niech w chwili t zbiorowość ta liczy x_t członków, a w chwili $t+1$

$$x_{t+1} = x_t(a+1) - ax_t^2 \,,$$

gdzie a jest dowolnym „parametrem wzrostu". Człon pierwszy równania reprezentuje wzrost populacji proporcjonalny do jej aktualnej wartości, a drugi – jej malenie – nieliniowe! Badanie tego modelu nietrudno zaprogramować. I co się okazuje? Dla $a < 2$ startując od niedużych wartości x (np. kilka dziesiątych) proces opisywany powyższym równaniem dąży do $x = 1$. Ale dla $2 < a < \sqrt{6}$ kolejne punkty skupiają się wokół dwu wartości i proces oscyluje między nimi. Dla nieco większych a liczebność populacji skacze między czterema, ośmioma itd. wartościami, wreszcie dla a wiekszych od około 2,6 nie ma żadnego konkretnego punktu skupienia i zachowanie się modelu jest w pełni chaotyczne.

Realne zjawiska są bardziej skomplikowane i niektórzy uważają, że chaos jest wszechobecny. Pojawia się zarówno w mechanice atmosfery jak i mechanice Układu Słonecznego. Jest to o tyle paradoksalne, że ciała niebieskie zwykło się uważać za wzór ładu. Tymczasem weźmy przykład Hyperiona – akurat jego ruch był kilka lat temu intensywnie badany. Ten satelita Saturna jest nieco nieregularną bryłą o rozmiarach około 190 km i obiega planetę po wyraźnie wydłużonej orbicie (mimośród 0,104). Siły pływowe Saturna usiłują, oczywiście, ustawić go najdłuższą osią w kierunku planety i w ten sposób zrównać jego prędkość rotacji ze średnią prędkością kątową ruchu orbitalnego. Tak się stało z ziemskim Księżycem, ale jego orbita mniej różni się od kołowej (mimośród dwa razy mniejszy), natomiast w przypadku Hyperiona widocznie tak stać się nie może. Owszem, gdyby sztucznie nadać mu ruch wirowy np. synchroniczny z obiegiem (rezonans 1:1), to już tak by zostało. W rzeczywistości jednak Hyperion na swojej orbicie koziołkuje i nie wydaje się, by kiedykolwiek miał przestać, czyli jego ruch obrotowy jest w dłuższych okresach chaotyczny. Potwierdzają to np. długotrwałe obserwacje jego jasności, które nie wykazują żadnych trwałych okresowości.

Jest nawet gorzej. Planetoidy należące do grup Trojan i Greków obiegają Słońce praktycznie na orbicie Jowisza (w trójkątnych punktach libracji układu Jowisz–Słońce), są więc z nim w rezonansie 1:1 i taki stan trwa. Brak jest natomiast planetoid, które byłyby z Jowiszem w rezonansie 1:2, 1:4, 2:5 i in. Fakt ten zauważył Daniel Kirkwood w 1866 r. Oznacza to, że niektóre rezonanse „przyciągają", a inne „odpychają" obiekty. Mechanika nieba zapewnia wprawdzie o stabilności Układu Słonecznego w tym sensie, że ocenia jako niemal nieprawdopodobne takie warunki początkowe, które miałyby doprowadzić do jego rozpadu. Nie ma jednak gwarancji, czy pojedynczy drobny obiekt nie zostanie zepchnięty na osobliwą orbitę.

Nie jest pewne, czy obliczenia numeryczne przyczynią się do wyjaśnienia tego problemu, bowiem trzeba by obliczać ruch Układu Słonecznego na miliony lat w przyszłość. Temu na razie nie są w stanie podołać współczesne komputery, ponadto ostateczny wynik zawsze zafałszowany zostaje przez nieuniknione maszynowe błędy „na ostatnim miejscu po przecinku" i wreszcie warunki początkowe, tzn. dzisiejsze położenia i prędkości planet i ich satelitów znamy z ograniczoną dokładnością. Można więc zaryzykować pogląd, że badania chaosu w mechanice zostały dopiero rozpoczęte, wyniki są wyrywkowe i nie bardzo wiadomo, jak dochodzić do uogólnień.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 682. Znaleźć cyfrę jedności (w zapisie dziesiętnym) liczby $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1992}$.
Rozwiązanie na str. 13

M 683. W czworościanie foremnym o objętości 1 poprowadzono 6 płaszczyzn w ten sposób, że każda z nich zawiera jedną z krawędzi czworościanu i środek przeciwległej krawędzi. Na ile części dzielą one czworościan? Znaleźć objętość każdej z tych części.
Rozwiązanie na str. 10

M 684. Czy istnieje funkcja różnowartościowa $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniająca dla każdego $x \in \mathbf{R}$ warunek $f(x^2) - (f(x))^2 \geq 1/4$?
Rozwiązanie na str. 10

Redaguje Jarosław KULPA

F 367. Wiązka światła laserowego o energii E i częstości ν spolaryzowana kołowo padła prostopadle na swobodny nieobracający się dysk o masie m i promieniu r. Obliczyć prędkość kątową dysku przy założeniu, że jest on ciałem doskonale czarnym.
Rozwiązanie na str. 13

F 368. Znajdująca się w przestrzeni kosmicznej bryłka węgla o temperaturze początkowej 25°C stygnie do temperatury zbliżonej do zera bezwzględnego. Ile fotonów przypadających na jeden atom węgla zostanie wyemitowanych przez bryłkę, przy założeniu, że węgiel jest ciałem doskonale czarnym. Entropia molowa węgla w temperaturze 25°C wynosi $S_m = 5{,}69$ J/(mol·K). Widmo ciała doskonale czarnego opisuje wzór $I(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$, gdzie k oznacza stałą Boltzmanna. (W rozwiązaniu można wykorzystać wartości całek: $\beta_2 = \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x-1} = 2{,}404$, $\beta_3 = \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1} = 6{,}48$.)
Rozwiązanie na str. 12