Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 1993

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Zadania z fizyki nr 163, 164

163. Zafrasowany Węchosław Szlabańczyk szukał porady u inspektora Wnikliwego (czasowo oddelegowanego do służby celnej).
– Otrzymaliśmy poufną informację, że na tej ciężarówce w niektórych puszkach zamiast piwa przemycane są narkotyki, ale jak odróżnić te puszki? – zastanawiał się.
– Nie możemy przecież otwierać wszystkich po kolei, a tu w Zapadłej Dziurze nie mamy nawet przyzwoitej wagi, nie mówiąc już o rentgenie.
– Czy dźwięk nie może być wskazówką? – inspektor wziął jedną z puszek do ręki i potrząsnął.
– Niestety, nie. Ten narkotyk ma formę pasty wypełniającej puszkę, ale na wierzchu i spodzie dla lepszego maskowania nalewają trochę wody, więc odgłos jest taki, jak zwykłej puszki z piwem.
Dłuższą chwilę trwała cisza.
– Chyba gdzieś znajdziemy jakąś gładką deskę? – zapytał wreszcie inspektor.
Jaki pomysł przyszedł do głowy inspektorowi Wnikliwemu?

164. Plastykowy krążek o średnicy 20 cm i masie 10 g jest równomiernie naładowany ładunkiem 100 nC. Z jaką prędkością kątową musiałby wirować ten krążek w płaszczyźnie poziomej, aby mógł zawisnąć podtrzymywany tylko przez pionowe pole magnetyczne o indukcji 2 T? Ile wynosiłaby wtedy w środku krążka indukcja jego własnego pola magnetycznego?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1993

Przypominamy treść zadań:

159. Małe ciało zawieszono na nici, która może być wciągana przez mały otworek i wprawiono w ruch drgający o amplitudzie kątowej α_0; swobodna długość nici wynosiła wtedy l_0. Następnie wciągnięto nić bardzo powolnym ruchem jednostajnym tak, że długość swobodna zmalała do l_1. Jak wyraża się przez dane wielkości końcowa amplituda kątowa α_1? Założyć, że obie amplitudy kątowe są małe.

159. Zgodnie z założeniem o małej wartości amplitudy i powolnym podciąganiu nitki, ruch wahadła jest w przybliżeniu ruchem harmonicznym, czyli kąt wychylenia ϕ zależy od czasu według wzoru $\phi = \alpha \sin \omega t$, gdzie α – amplituda, $\omega = \sqrt{g/l}$. Podstawiając do II zasady dynamiki odpowiednie wyrażenie na przyspieszenie dośrodkowe otrzymujemy siłę napięcia nici N

$$N = mg\cos\phi + m\Omega^2 l,$$

gdzie $\Omega = \dfrac{d\phi}{dt} = \alpha\omega\cos\omega t$ jest prędkością kątową wahadła. Ponieważ dla małych ϕ zachodzi przybliżona równość $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, więc dochodzimy do następującego wyrażenia na N:

$$N = mg + mg\alpha^2\left(\cos^2\omega t - \frac{1}{2}\sin^2\omega t\right).$$

Jeśli powoli podciągniemy nić o dl, to wykonamy przy tym pracę $\overline{N}dl$ (kreska oznacza średnią po czasie). Ponieważ średnia wartość $\cos^2\omega t$ i $\sin^2\omega t$ jest równa $\frac{1}{2}$, mamy $\overline{N} = mg + \frac{1}{4}mg\alpha^2$. Pracę $\overline{N}dl$ należy teraz przyrównać do zmiany energii wahadła. Iloczyn $mgdl$ odpowiada tu zmianie energii „zerowej" (w punkcie równowagi), przyrównując zaś $\frac{1}{4}mg\alpha^2 dl$ do zmiany energii drgań (danej, jak nietrudno wyprowadzić, wzorem $E = \frac{1}{2}mgl\alpha^2$) otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{1}{4}\alpha^2 dl = d\left(\frac{1}{2}l\alpha^2\right).$$

Całkując uzyskujemy warunek $l\alpha^4 = const$, zatem rozwiązaniem jest

$$\alpha_1 = \alpha_0(l_0/l_1)^{1/4}.$$

160. W okolicach niezelektryfikowanych używa się czasem lodówek działających dzięki spalaniu ropy (lub innego paliwa). Ocenić ilość ropy, którą trzeba spalić, aby zamrozić 1 kg wody. Założyć, że lodówka jest idealną maszyną cieplną. Dane: temperatura otoczenia (czyli także temperatura początkowa wody) 25°C, ciepło właściwe wody 4200 J/kg·K, ciepło topnienia lodu $3{,}3 \cdot 10^5$ J/kg, ciepło spalania ropy 45 MJ/kg, temperatura spalania 1200°C.

160. Zadanie można rozwiązać stosując nierówność Clausiusa, która w tym przypadku sprowadza się do warunku

$$(*) \qquad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \le 0,$$

gdzie Q_1 jest ciepłem pobranym przy spalaniu ropy, T_1 – temperaturą płomienia, Q_2 – ciepłem pobranym przy oziębianiu i zamarzaniu wody, T_2 można przyjąć jako równe temperaturze krzepnięcia wody (ewentualnie ściślej: początkowo przy oziębianiu wody T_2 jest nieco wyższe, potem przy zamarzaniu nieco niższe...), Q_3 jest ciepłem oddanym otoczeniu (z ujemnym znakiem), czyli $Q_3 = -(Q_1 + Q_2)$, a T_3 jest temperaturą otoczenia. Dla doskonałej (odwracalnej) maszyny cieplnej nierówność Clausiusa przechodzi w równość.

[Uwaga dla Czytelników nie znających nierówności Clausiusa: Równoważną metodą rozwiązania jest wprowadzenie dwóch odrębnych cykli termodynamicznych – cyklu Carnota, w którym spalaniu paliwa towarzyszy wykonywanie pracy, a ta praca napędza odwrotny cykl Carnota, czyli właściwą lodówkę. Stosując do obu cykli znany wzór na sprawność cyklu Carnota dochodzimy do wzoru (*)].

Przekształcając wzór (*) znajdujemy

$$Q_1 = Q_2\frac{(T_3 - T_2)T_1}{(T_1 - T_3)T_2},$$

a podstawiając dane i przeliczając temperaturę na skalę Kelvina otrzymujemy dość zaskakujący wynik: wystarczy spalić 1,1 g ropy. Oczywiście, realna lodówka zużyje znacznie więcej paliwa, gdyż jej działanie jest dalekie od odwracalności.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 251 (WT=1,71) i 252 (WT=2,88) z numeru 12/1992

Tomasz Wietecha	– Tarnów	44,20
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	41,46
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	41,19
Marcin Kasperski	– Warszawa	39,97
Adam Czornik	– Bytom	38,80,
Mirosław Matlęga	– Skoczów	38,76

Pan Wietecha kończy drugą rundę.

Zadania z matematyki nr 265, 266

Redaguje Marcin E. KUCZMA

265. Dwusieczna kąta C trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie N. Okrąg wpisany ma promień r i jest styczny do boku AB w punkcie T. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $|AT| \cdot |BT| = r(r + 2|MN|)$.

266. Rozważamy wielomian

$$P(t) = \prod_{k=0}^{n-1}(t+k).$$

Przypuśćmy, że liczby dodatnie x, y, u, v spełniają związki: $P(x) = u^n$, $P(y) = v^n$, $x \geq y$. Dowieść, że $x - y \leq u - v$.

Zadanie **266** zaproponował pan Przemysław Gadziński ze Środy Śląskiej.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1993

Przypominamy treść zadań:

261. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, n spełniające równanie

$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n.$$

262. Czy istnieje na płaszczyźnie zbiór ograniczony wypukły, o niepustym wnętrzu, który można podzielić trzema liniami prostymi na siedem części o równych polach?

261. Dla $n = 1$ jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 1$; dla $n = 2$ jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 3$. Wykażemy, że dla $n \geq 3$ równanie nie ma rozwiązań całkowitych $x \geq 1$.

Ustalmy $n \geq 3$; przyjmijmy $y = x + 1$ i przepiszmy równanie w postaci $y^n = (y+1)^n - (y-1)^n$, czyli

$$(1) \qquad y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}y^k.$$

Gdy n jest nieparzyste, prawa strona (1) równa się

$$2 + 2\sum_{j=1}^{[n/2]}\binom{n}{2j}y^{2j}.$$

Wynikałoby stąd, że 2 dzieli się przez y^2, a to jest niemożliwe.

Gdy n jest parzyste, prawa strona (1) równa się

$$2\sum_{j=1}^{n/2}\binom{n}{2j-1}y^{2j-1},$$

czyli równanie przybiera postać

$$(2) \qquad y^n = 2ny + 2Sy^3 + 2ny^{n-1},$$

gdzie przez S oznaczyliśmy sumę

$$S = \sum_{j=2}^{n/2-1}\binom{n}{2j-1}y^{2j-4}.$$

Dzielimy (2) stronami przez y i otrzymujemy związek

$$y^{n-1} = 2n + 2Sy^2 + 2ny^{n-2},$$

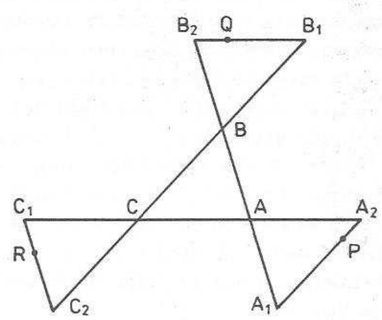
z którego wynikają dwie rzeczy: że składnik $2n$ dzieli się przez y, oraz że $y^{n-1} > 2ny^{n-2}$ (czyli $y > 2n$). Te dwie konkluzje nie dadzą się jednak pogodzić.

Ostatecznie więc rozwiązaniem zadania są pary $x = 1$, $n = 1$ oraz $x = 3$, $n = 2$.

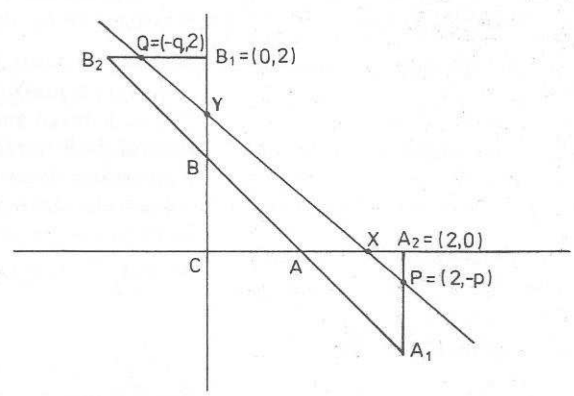
262. Wykażemy, że zbiór o podanych własnościach nie istnieje.

Przypuśćmy, że $\mathcal{F}$ jest takim zbiorem i że trzy rozważane proste przecinają się w punktach A, B, C. Niech AA_1A_2, B_2BB_1, C_1C_2C będą obrazami trójkąta ABC w symetriach środkowych odpowiednio względem punktów A, B, C. Na każdym z odcinków A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 znajdują się punkty zbioru $\mathcal{F}$ (bo części zbioru $\mathcal{F}$ zawarte w odpowiednich sektorach mają mieć pola równe polu trójkąta ABC). Wybierzmy po jednym punkcie: $P \in A_1A_2$, $Q \in B_1B_2$, $R \in C_1C_2$; $P, Q, R \in \mathcal{F}$.

Możemy przyjąć, że spośród trzech stosunków $|PA_2| : |A_1A_2|$, $|QB_2| : |B_1B_2|$, $|RC_2| : |C_1C_2|$ najmniejszy jest ten pierwszy. Oznaczmy go przez p oraz przyjmijmy $q = |B_1Q| : |B_1B_2|$. Tak więc $|QB_2| : |B_1B_2| = 1 - q \geq p$, czyli $p + q \leq 1$. Stąd $pq \leq 1/4$.



Wszystkie pojęcia występujące w zadaniu są niezmiennikami przekształceń afinicznych. Stosując odpowiednie przekształcenie afiniczne możemy przyjąć, że ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym ($|\measuredangle C| = 90°$) oraz dobrać prostokątny układ współrzędnych tak, by $C = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $A_1 = (2,-1)$, $A_2 = (2,0)$, $B_1 = (0,2)$, $B_2 = (-1,2)$, $P = (2,-p)$, $Q = (-q,2)$. Oznaczmy przez $X = (x,0)$ i $Y = (0,y)$ punkty przecięcia prostej PQ z prostymi CA i CB.



Standardowo obliczamy $x = (4 - pq)/(2 + p)$, $y = (4 - pq)/(2 + q)$.

Punkty X, Y (jako punkty odcinka PQ) należą do zbioru $\mathcal{F}$. Zatem trójkąt CXY zawiera się w $\mathcal{F}$. W myśl warunku zadania, pole części zbioru $\mathcal{F}$ zawartej w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych równa się podwojonemu polu trójkąta ABC. Otrzymujemy więc ciąg zależności

$$1 = 2 \cdot \mathrm{pole}(ABC) \geq \mathrm{pole}(CXY) =$$
$$= \frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(4-pq)^2}{4 + 2(p+q) + pq} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(4 - (1/4))^2}{4 + 2 \cdot 1 + (1/4)} = \frac{9}{8}.$$

Sprzeczność kończy dowód.