epsilon

9/93
(31)

Liczby p-adyczne

◇ Liczby naturalne możemy zapisywać za pomocą systemu dwójkowego, czyli używając tylko zer i jedynek; np. 5 to 101. Ale w systemie dwójkowym potrafimy zapisać także wszystkie liczby rzeczywiste, używając cyfr po przecinku – może ich być nieskończenie wiele: $\mp a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0{,}b_1 b_2 \dots$, gdzie a_i, b_i są zerami lub jedynkami.

◇ Rozważmy twory postaci trochę innej (też w systemie dwójkowym): po przecinku musi być skończenie wiele cyfr (zer i jedynek), natomiast przed przecinkiem może ich być nieskończenie wiele: $\mp \dots a_1 a_0{,}b_0 b_1 \dots b_n$. Twory te nazywamy liczbami 2-adycznymi.

◇ W szczególności każda liczba, która w rozwinięciu dwójkowym ma skończenie wiele cyfr po przecinku, jest liczbą 2-adyczną; np. 53,625 to +110101,101 (i jako liczba zapisana w systemie dwójkowym, i jako liczba 2-adyczna).

◇ Oba zapisy nie są jednoznaczne. W przypadku liczb, np. 0,111... i 1,000... oznaczają tę samą liczbę 1. W przypadku liczb 2-adycznych podobnie ...111,0 i $-\dots 001{,}0$ oznaczają -1 (bo $\dots 111 + 1 = \dots 0$).

◇ W systemie dwójkowym możemy stosować wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego. Na przykład $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \dots = 1{,}111\dots =$ $= 10{,}000\dots = 10$; korzystając ze wzoru mamy $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, czyli 10 w systemie dwójkowym.

◇ Sumą liczb $1 + 2 + 4 \dots$ jest, oczywiście, ∞. Gdybyśmy jednak traktowali je jako liczby 2-adyczne, byłoby: $1 + 10 + 100 + 1000 \dots = \dots 111{,}0 = -1$, co zgadza się ze wzorem na sumę ciągu geometrycznego (choć dla zwykłych liczb oczywiście nie wolno go tu stosować): $\frac{1}{1-2} = -1$.

◇ Liczby 2-adyczne tworzą bardzo ważną i „porządną" strukturę algebraiczną; są ciałem.

◇ Oczywiście analogicznie można tworzyć liczby p-adyczne dla innych p niż 2. Niestety, nie zawsze jest to interesujące; w szczególności nie warto zajmować się liczbami 10-adycznymi, bo są wśród nich dzielniki zera.

◇ Ciało liczb 2-adycznych jest homeomorficzne ze zbiorem Cantora bez jednego punktu.

◇ Skonstruowanie ciał liczb p-adycznych miało zasadniczy wpływ na powstanie teorii ciał.

Jerzy GRZYBOWSKI

Nasz Czytelnik, pan Adam Janik opowiedział nam następującą historię.
Gdy był studentem I roku matematyki, zaczęto go uczyć algebry. Po paru miesiącach, podczas rozmowy kuluarowej na temat algebry, stwierdził, że zdecydowanie woli bogatsze struktury, takie jak ciało, natomiast prostsze: grupa, pierścień, niezbyt mu się podobają. Na to z oburzeniem zareagowała jego koleżanka ze studiów (prawdopodobnie mając na myśli jedynie algebrę):
– Coś ty! Przecież żeby było ciało, musi być najpierw pierścień.

W archiwach Instytutu Matematyki Najwspółcześniejszej znajduje się notatka o seminarium z teorii rozbójnika i wygłoszonym tam przez dr. N. referacie „Ideały trywialne w ciałach nietrywialnych". Kronikarz pisze, że referat „rozbudził duże zainteresowanie słuchaczy z chwilą, kiedy referent zdefiniował ciało nietrywialne jako ciało posiadające co najmniej trzy elementy. Niestety, rozbudzona ciekawość słuchaczy nie została zaspokojona, gdyż dr N. nie powiedział, o jakie elementy właściwie chodzi".

Słowniczek trudniejszych terminów

Grupa – zbiór, w którym rozważamy działanie $\oplus$ mające pewne przyjemne własności. W szczególności musi istnieć w grupie element neutralny e (tzn. taki, że $e \oplus a = a \oplus e = a$ dla dowolnego a z tego zbioru).

Pierścień – grupa, w której określone jest także i drugie działanie $\otimes$ (rozdzielne względem $\oplus$), już niekoniecznie mające równie przyjemne własności jak $\oplus$. Element neutralny działania $\oplus$ nazywamy *„zero"*; jeśli $\otimes$ też ma element neutralny, mówi się o tym elemencie *„jedynka"*.

Dzielniki zera – elementy a, b pierścienia, różne od zera, takie, że $a \otimes b = 0$.

Ciało – pierścień taki, że po wyrzuceniu z niego zera jest on grupą ze względu na działanie $\otimes$. Łatwo zauważyć (jak?), że ciało nie może mieć dzielników zera.

Przykłady: zbiór liczb całkowitych z dodawaniem tworzy grupę, zbiór liczb całkowitych z dodawaniem i mnożeniem jest pierścieniem z jedynką (ale nie ciałem!), zbiór liczb wymiernych oraz zbiór liczb rzeczywistych (z dodawaniem i mnożeniem) są ciałami.

Zbiory homeomorficzne – zbiory, które dla wielu potrzeb matematycznych mogą być uznawane za takie same (por. np. *EPSILON* nr 8).

Zbiór Cantora – pewien bardzo ciekawy podzbiór prostej. Tworzymy go tak: przedział domknięty dzielimy na trzy równe części, wyrzucamy środkową (zostawiając końce), każdy z dwóch pozostałych odcinków dzielimy na trzy równe części... itd. w nieskończoność. To, co zostanie, to zbiór Cantora.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.