XLV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Udowodnić, że układ równań
$$\begin{cases} a^2 - b = c^2 \\ b^2 - a = d^2 \end{cases}$$
nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c, d.

2. Ciąg funkcji $f_0, f_1, f_2, \ldots$ jest określony następująco:
$$f_0(x) = |x| \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbf{R},$$
$$f_{n+1}(x) = |f_n(x) - 2| \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ oraz wszystkich } x \in \mathbf{R}.$$
Dla każdej liczby naturalnej n rozwiązać równanie $f_n(x) = 1$.

3. Dowieść, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{b+c-a}.$$

4. Dany jest okrąg o środku O, punkt A wewnątrz tego okręgu oraz cięciwa PQ, nie będąca średnicą, przechodząca przez A. Proste p i q są styczne do rozważanego okręgu odpowiednio w punktach P i Q. Prosta l przechodząca przez punkt A i prostopadła do OA przecina proste p i q odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $|AK| = |AL|$.

II seria

5. Udowodnić, że jeżeli wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to wielomian $x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{1}{8}(ab - c)$ także ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

6. Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła. Wykazać, że jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba naturalna n, że
$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n})(x) = 1,$$
to $f(1) = 1$.

7. Na zewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ budujemy trójkąty podobne APB, BQC, CRD, DSA, w ten sposób, że $|\angle PAB| = |\angle QBC| = |\angle RCD| = |\angle SDA|$, $|\angle PBA| = |\angle QCB| = |\angle RDC| = |\angle SAD|$. Dowieść, że jeśli czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem, to czworokąt $ABCD$ też jest równoległobokiem.

8. Dane są takie liczby naturalne a, b, c, że a^3 dzieli się przez b, b^3 dzieli się przez c, a c^3 dzieli się przez a. Udowodnić, że liczba $(a + b + c)^{13}$ jest podzielna przez abc.

III seria

9. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnić, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

10. Liczby dodatnie p i q spełniają warunek $p + q = 1$. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n zachodzi nierówność
$$(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \ge 1.$$

11. Trójkąt o obwodzie $2p$ jest wpisany w koło o promieniu R i opisany na kole o promieniu r. Dowieść, że $p < 2(R + r)$.

12. Udowodnić, że sumy przeciwległych kątów dwuściennych czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych krawędzi tego czworościanu są równe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem **właściwego komitetu okręgowego Olimpiady** najpóźniej dnia

I seria	II seria	III seria
11 października 1993 r.	**10 listopada 1993 r.**	**10 grudnia 1993 r.**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 310, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.