# Nierówność Ptolemeusza

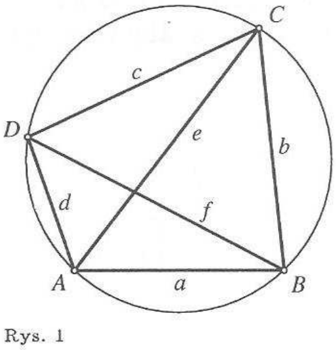
*Józef BANAŚ*

W geometrii elementarnej można spotkać twierdzenie, zwane twierdzeniem Ptolemeusza. Twierdzenie to zostało podane przez znanego w starożytności matematyka i astronoma greckiego, Ptolemeusza, żyjącego w latach około 100 – 168. Warto przypomnieć, że Ptolemeusz był twórcą geocentrycznego systemu budowy świata, który opisał w słynnym dziele pt. *Almagest*. W dziele tym znajduje się również twierdzenie, o którym wyżej wspomniano. Brzmi ono następująco.

**Twierdzenie Ptolemeusza.** *Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg równy jest sumie iloczynów długości boków przeciwległych.*

Zatem, przy oznaczeniach z rysunku 1, twierdzenie to możemy zapisać w formie równości

$$ef = ac + bd.$$




Rys. 1

Podamy teraz jeden z prostszych dowodów tego twierdzenia, oparty głównie na twierdzeniu cosinusów. Pozostając przy oznaczeniach z rysunku 1 zauważmy, że z trójkątów $ABC$ i $ADC$ otrzymujemy

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B,$$
$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D.$$

Ponieważ czworokąt jest wpisany w okrąg, więc $B + D = 180°$. Stąd dostajemy, że $\cos D = -\cos B$. Uwzględniając ten fakt w drugiej z powyższych równości otrzymamy

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B,$$
$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos B.$$

Mnożąc teraz pierwszą równość przez $cd$, drugą zaś przez $ab$ oraz dodając je później stronami uzyskamy następującą równość

$$\begin{aligned}(ab + cd)e^2 &= (a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab = \\ &= a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab = \\ &= (ad + bc)(ac + bd).\end{aligned}$$

Stąd

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}.$$

Zauważmy dalej, że rozpatrując z trójkąty $DAB$ i $DAC$ otrzymamy

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A,$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Rozumując zupełnie analogicznie jak poprzednio dostajemy

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}.$$

Z otrzymanych wzorów na $e^2$ i $f^2$ mamy dalej

$$e^2f^2 = (ac + bd)^2.$$

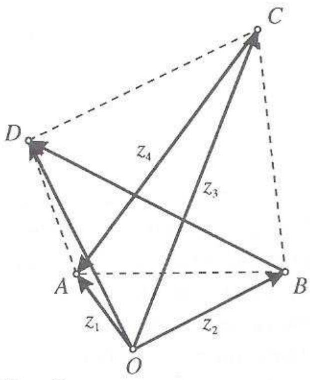
Ostatecznie $ef = ac + bd$, co jest żądaną równością.

Proponujemy teraz Czytelnikowi zadanie, które można rozwiązać w prosty sposób korzystając z twierdzenia Ptolemeusza.

*Obliczyć pole czworokąta wpisanego w okrąg i mającego boki o długościach $a, b, c, d$, wiedząc, że jego przekątne są prostopadłe.*

Postawmy teraz pytanie: Co stanie się z równością w twierdzeniu Ptolemeusza, jeżeli odrzucimy założenie o tym, że czworokąt jest wpisany w okrąg?

Zauważmy, że gdybyśmy chcieli „pójść" poprzednią drogą, rachunki bardzo się skomplikują.




Rys. 2

Natomiast bardzo skuteczną metodą okazuje się tutaj zastosowanie liczb zespolonych. Metoda ta jest często w geometrii stosowana z dużym powodzeniem.

Załóżmy więc, że dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Wprowadźmy na płaszczyźnie czworokąta układ współrzędnych kartezjańskich. Wtedy każdy punkt $(x, y)$ tej płaszczyzny może być uważany za liczbę zespoloną $z = x + iy$ lub też za wektor $z$ zaczepiony w początku układu współrzędnych.

Zatem możemy uważać, że wierzchołki $A, B, C, D$ rozważanego prostokąta są liczbami zespolonymi $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ (porównaj rys. 2).

Wtedy $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$, $\overrightarrow{BC} = z_3 - z_2$, $\overrightarrow{CD} = z_4 - z_3$, $\overrightarrow{AD} = z_4 - z_1$, $\overrightarrow{AC} = z_3 - z_1$, $\overrightarrow{BD} = z_4 - z_2$. Oznaczmy, podobnie jak poprzednio: $a = |z_2 - z_1|$, $b = |z_3 - z_2|$, $c = |z_4 - z_3|$, $d = |z_4 - z_1|$, $e = |z_3 - z_1|$, $f = |z_4 - z_2|$. Skorzystajmy następnie z łatwej do sprawdzenia tożsamości:

$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_4 - z_2)(z_3 - z_1)\,.$$

Stąd, biorąc moduły z obu stron oraz korzystając z własności modułu, mamy

$$|z_3 - z_1||z_4 - z_2| \leq |z_2 - z_1||z_4 - z_3| + |z_3 - z_2||z_4 - z_1|$$

lub inaczej

$$ef \leq ac + bd\,.$$

Otrzymana nierówność nosi nazwę *nierówności Ptolemeusza.* Wypowiadamy ją geometrycznie w następujący sposób:

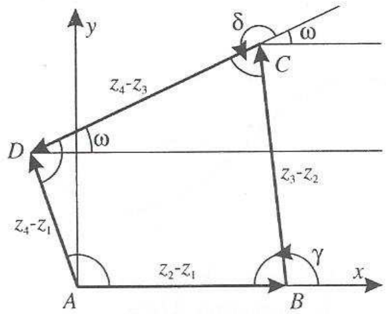
*Iloczyn długości przekątnych czworokąta wypukłego jest nie większy od sumy iloczynów długości jego boków przeciwległych.*

Zauważmy teraz, że z powyższego rozumowania możemy również uzyskać twierdzenie Ptolemeusza, a nawet coś więcej.

Rzeczywiście, łatwo zauważyć, że w powyższej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)| = |(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)| + |(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)|\,.$$

Z drugiej strony wiemy, że ostatnia równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{u} = (z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ oraz $\mathbf{v} = (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ są równoległe oraz mają ten sam zwrot. Symbolicznie będziemy to oznaczali $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$. Zobaczmy, kiedy to ma miejsce. Przyjmijmy w tym celu „wygodny" układ współrzędnych, a więc taki, jak na rysunku 3. Pozostańmy przy wprowadzonych oznaczeniach.




Rys. 3

Jeżeli mnożymy liczby zespolone $(z_4 - z_1)$ oraz $(z_3 - z_2)$, to otrzymamy liczbę zespoloną, która jako wektor tworzy kąt z dodatnią półosią osi $OX$ równy $A + \gamma$ – dodajemy kąty, jakie tworzą z tą półosią poszczególne czynniki.

Podobnie $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ tworzy kąt $0 + \delta = \delta$. A więc $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy kąty $A + \gamma$ oraz $\delta$ różnią się o wielokrotność $2\pi$. Otóż

$$\delta = \omega + \pi = \underbrace{A + D - \pi}_{\omega} + \pi = A + D\,,$$

$$A + \gamma = \pi - B + A\,,$$

skąd

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow A + D = \pi - B + A (\operatorname{mod} 2\pi) \Leftrightarrow B + D = \pi\,.$$

Otrzymany związek oznacza, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Zatem efektem powyższych rozważań jest następujący wniosek:

*W nierówności Ptolemeusza równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie „skojarzonym z tą nierównością" można opisać okrąg.*

**Rozwiązanie zadania M 676.** Zauważmy, że

$$(w - x)(w - y)(w - z) = w^3 - w^2(x + y + z) + w(xy + yz + zx) - xyz.$$

(To są po prostu wzory Viete'a dla równania trzeciego stopnia.) Zatem liczby $x$, $y$ i $z$, spełniające rozpatrywany układ równań są pierwiastkami wielomianu $P(w) = w^3 - 6w^2 + 11w - 6$, który łatwo rozłożyć na czynniki: $P(w) = (w - 1)(w - 2)(w - 3)$. Ponieważ układ równań jest symetryczny ze względu na wszystkie niewiadome, to spełnia go sześć trójek liczb, które otrzymujemy jako (wszystkie) permutacje trójki (1,2,3).