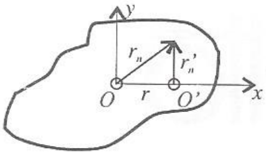


Rozważamy moment bezwładności I względem osi z przechodzącej przez środek masy O oraz moment bezwładności względem osi równoległej do z przechodzącej przez punkt O'.

Fizyczny dowód twierdzenia Steinera

Ponieważ jest kilka twierdzeń Steinera, więc aby nie było wątpliwości, o które twierdzenie nam chodzi, zacznijmy od jego sformułowania.

Moment bezwładności ciała sztywnego względem dowolnie dobranej osi jest równy sumie momentu bezwładności względem osi do niej równoległej przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy ciała przez kwadrat odległości obu osi.

Dowód, który zwykle podaje się w szkole (patrz margines) ma charakter bardziej matematyczny niż fizyczny. Zakłada się, że ciało składa się z bardzo wielu malutkich kawałeczków i moment bezwładności przedstawia się w postaci sumy iloczynów mas tych kawałeczków przez kwadrat odległości od osi. Cały dowód sprowadza się do przekształcenia tej sumy.

Dowód, który my podamy, nie będzie wykorzystywał żadnych sum ani całek, a jedynie wzór na energię ruchu środka masy i związaną z ruchem obrotowym.

$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_n ,\\
I &= \sum m_n r_n^2 = \\
&= \sum m_n (x_n^2 + y_n^2),\\
I_1 &= \sum m_n (r_n')^2 = \\
&= \sum m_n ((x_n + r)^2 + y_n^2) = \\
&= I + mr^2 + 2r \sum m_n x_n ,
\end{aligned}
$$

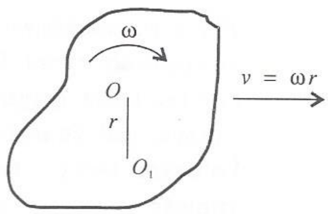
gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich n.

Ostatni składnik jest równy zeru – z definicji środka masy. Czyli

$$I_1 = I + mr^2 .$$

Na studiach podaje się w zasadzie ten sam dowód, z tą jednak różnicą, że już nie mówi się o sumie, lecz o całce.

Wyobraźmy sobie, że chcemy obliczyć moment bezwładności względem osi O_1 odległej o r od środka masy.



Oznaczmy przez O oś przechodzącą przez środek masy i równoległą do osi O_1. Momenty bezwładności względem O oraz O_1 oznaczmy przez I i I_1. Nadajmy ciału ruch bedący złożeniem ruchu obrotowego z prędkością kątową ω względem osi O oraz ruchu prostoliniowego z prędkością $v = \omega r$ (w kierunku prostopadłym do osi). Wówczas energia kinetyczna ciała wynosi

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 .$$

Z drugiej strony możemy tę energię obliczyć inaczej. Otóż, w momencie gdy oś O_1 znajduje się dokładnie pod osią O (w kierunku prostopadłym do prędkości $\vec{v}$ – tak jak na rysunku), oś O_1 jest chwilową osią obrotu (bowiem, jak łatwo zauważyć, w tym momencie wypadkowa prędkość osi O_1 jest równa zeru). Tak więc energia kinetyczna ciała wyraża się wzorem

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega^2 .$$

Stąd porównując wzory mamy

$$\frac{1}{2}m(\omega r)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I_1\omega^2 ,$$

$$I_1 = I + mr^2 .$$

Piotr HAJŁASZ

Rozwiązanie zadania M 678. Kwadrat liczby całkowitej daje z dzielenia przez 4 resztę zero lub jeden, zatem suma dwóch kwadratów — resztę zero, jeden lub dwa. Dwie kolejne liczby nieparzyste dają różne reszty z dzielenia przez 4: jedna z nich daje resztę jeden, a druga – resztę trzy. Stąd już wynika teza zadania.

Rozwiązanie zadania M 677. Zauważmy, że $5^2 = 27 - 2$ oraz $2^5 = 27 + 5$, zatem liczba a_n jest równa

$$2 \cdot (27+5)^n + 27 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 27^{n-k} 5^k + 2 \cdot 5^n + 27 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 27 \cdot N$$

dla pewnego naturalnego N. (Można też, oczywiście, przeprowadzić prosty dowód indukcyjny.)