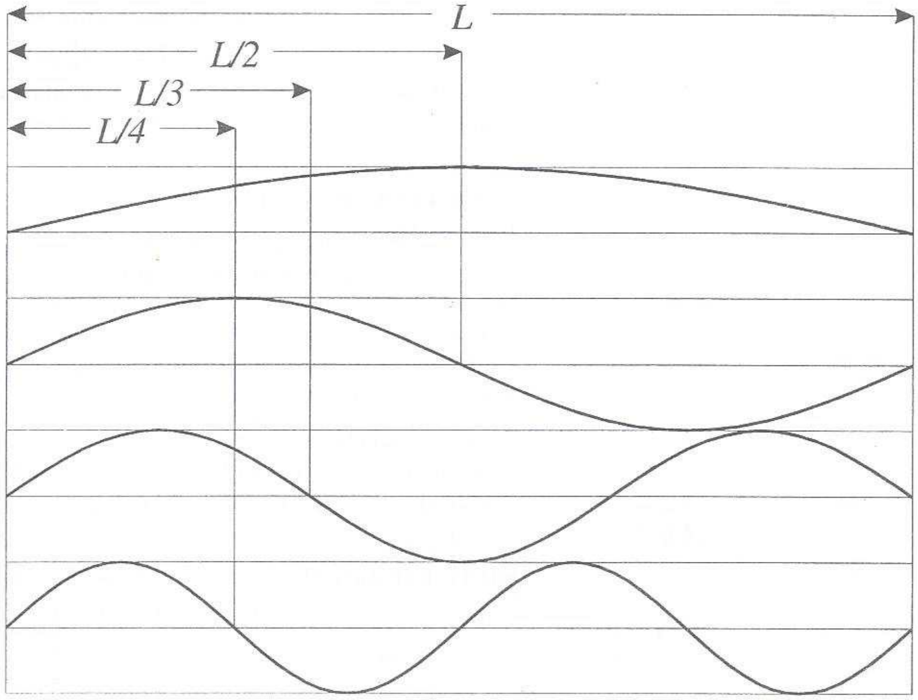
Dźwięki – muzyka i hałas

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Żyjemy w świecie niezwykłego bogactwa dźwięków. Jedne odbieramy jako szum czy hałas, podczas gdy inne określamy mianem muzyki. A jaka jest właściwie różnica między zbiorem dźwięków tworzących melodię, a hałasem? Zasadniczą cechą muzyki, nawet tej bardzo hałaśliwej, jest to, że stosunki częstotliwości dominujących w niej dźwięków określone są według precyzyjnych reguł. Przy czym reguły te częściowo zależą od cywilizacji czy kultury, na której gruncie muzyka jest tworzona. Dlatego ludowa melodia tybetańska może wydać się Europejczykowi dziwnym jazgotem i podobne wrażenia może mieć Tybetańczyk słuchając Mozarta.

Podstawowa zasada porządkująca różnorodność dźwięków wydaje się być uniwersalna. Dźwięki, których częstotliwości są wielokrotnościami pewnej podstawowej, lecz dowolnej, częstotliwości odbieramy jako podobne, pokrewne. Uniwersalność wynika zapewne z naszegò doświadczenia. Większość źródeł wytwarzając dźwięk o częstotliwości f produkuje jednocześnie dźwięki o częstotliwościach $2f$, $3f$ itd. Dzieje się tak z drgającą struną pokazaną na rysunku.



Długość struny (L) określa długość możliwych fal (stojących), które się wzbudzają. Najdłuższa fala ma długość $2L$, krótsza L, następna $2L/3$, jeszcze następna $L/2$ itd. Struna więc wytwarza podstawowy dźwięk (ton) o częstotliwości $f = c/2L$ (c jest prędkością dźwięku) i wyższe dźwięki (tony) harmoniczne o częstotliwościach $2f$, $3f$, $4f$ itd. Słyszymy więc tzw. wieloton harmoniczny. Ponieważ jednak drgająca struna, jak i inne źródła dźwięku, nie jest zwykle oscylatorem dokładnie harmonicznym, więc poza składowymi harmonicznymi mamy w dźwięku składowe anharmoniczne, których częstotliwości nie są związane z częstotliwością podstawową prostą regułą i zależą od konkretnego instrumentu, sposobu grania itp. Składowe harmoniczne i anharmoniczne nadają dźwiękowi barwę sprawiając, że to samo c grane na fortepianie czy skrzypcach brzmi odmiennie, że ten sam instrument w rękach różnych muzyków brzmi inaczej.

Wybrawszy podstawową częstotliwość f dzielimy cały zakres słyszalnych częstotliwości na przedziały $(f, 2f)$, $(2f, 4f)$, $(4f, 8f)$ itd. zwane oktawami. Podczas, gdy podział na oktawy ma charakter uniwersalny, różne cywilizacje i kultury dopracowały się różnych podziałów częstotliwości w ramach jednej oktawy. Ludy prymitywne dzieliły zwykle oktawę na kilka przedziałów: 5, 6 czy 7. Muzyka hinduska wyodrębnia natomiast aż 22 nierówne interwały. Pierwszy europejski system dwunastodźwiękowy pochodzący z VI w. p.n.e. stworzył Pitagoras wykorzystując doświadczenia starogreckich muzyków. Podstawą całego systemu były stosunki między pierwszymi trzema liczbami naturalnymi. Stosunek 1 : 2 określa oktawę, 2 : 3 zaś tzw. naturalną kwintę. Zbiór 12 dźwięków pitagorejskiego systemu znajdujemy odliczając 12 kolejnych kwint i transponując kolejne stopnie do jednej oktawy. Jeśli częstotliwość podstawową oznaczymy przez f, kolejne dźwięki oddalone o kwintę znajdujemy jako $f_n = f(3/2)^n$. Dźwięk, który znalazł się w k-tej oktawie tzn. w przedziale $(2^{k-1}f, 2^k f)$, transponujemy do pierwszej oktawy dzieląc jego częstotliwość przez 2^{k-1}.

W systemie pitagorejskim, zwanym również naturalnym, interwałom oktawy, kwinty, kwarty, tercji odpowiadają stosunki 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5. Miało to być wyrazem wyższego porządku, harmonii świata. Niestety system pitagorejski ma poważną wadę. Dwunasty stopień nie pokrywa się po transpozycji z pierwszym. Zamiast dźwięku o częstotliwości f znajdujemy $531441/524288\ f$. Ta niewielka różnica nazywana komatem pitagorejskim prowadziła do trudności w transponowaniu melodii z jednej oktawy do drugiej, szczególnie istotnych w późniejszej muzyce wielogłosowej. Kolejne systemy starały się na różne sposoby wyeliminować ten problem. Ostatecznie około roku 1700 ustalił się system równomiernie temperowany, w którym oktawa podzielona jest na 12 równych interwałów zwanych półtonami. Częstoliwości kolejnych stopni znajdujemy jako $f_n = f\,2^{n/12}$.

System równomiernie temperowany umożliwia łatwą transpozycję melodii z jednej oktawy do drugiej, natomiast interwały nie wyrażają się już stosunkami małych liczb naturalnych, nie są nawet liczbami wymiernymi. Tak np. kwintę, której w systemie naturalnym odpowiadał ułamek 2/3, określa w systemie równomiernie temperowanym liczba rzeczywista $2^{-7/12} = 0,6674199\ldots$

Całość europejskiego repertuaru muzycznego wykorzystującego 8 oktaw można zagrać za pomocą dźwięków o 96 częstotliwościach podstawowych. Przez długi czas nie przywiązywano dużej wagi do precyzyjnego określenia absolutnych wartości owych częstotliwości. W roku 1850 przyjęto na mocy międzynarodowej umowy jednolity strój muzyczny z dźwiękiem a^1 o częstotliwości 435 Hz. Obecnie panujący strój wprowadzony w 1939 roku ustala a^1 jako 440 Hz.

Rozkład częstotliwości dźwięków tworzących szum charakteryzuje się brakiem wydzielonych częstotliwości i najczęściej opisywany jest zależnością $1/f^k$. W przypadku $k = 0$ mamy tzw. biały szum. Jednak ze względu na specyficzne działanie naszych uszu, jako biały obieramy szum typu $1/f$. Hałas to najczęściej połączenie szumu z kilkoma dominującymi częstotliwościami, które zwykle nie należą do muzycznego systemu dźwiękowego.

Ucho ludzkie odbiera dźwięki o częstotliwościach od kilkunastu do kilkunastu tysięcy drgań na sekundę tzn. od kilkunastu Hz do kilkunastu kHz. Instrumentem o najszerszej skali są, oczywiście, organy pokrywające aż 9 oktaw od dźwięku C_2 o częstotliwości 16,4 Hz do c^6 odpowiadającego 8372 Hz.

Z przedstawionych wywodów wynika, że analiza częstotliwości powinna umożliwić łatwe odróżnienie hałasu od muzyki. Ciekawe jak to wygląda w praktyce.

Rozwiązanie zadania F 363.
Zapisujemy wzór na masę Wszechświata w postaci
$$M \approx G^{\alpha} H^{\beta} c^{\gamma}.$$
Podstawiając jednostki $[G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, $[H] = s^{-1}$, $[c] = \frac{m}{s}$ otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} \alpha = -1, \\ 3\alpha + \gamma = 0, \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$
Rozwiązujemy ten układ i otrzymujemy: $\alpha = -1$, $\gamma = 3$, $\beta = -1$. Stąd
$$M \approx \frac{c^3}{GH} \approx 2,3 \cdot 10^{53}\ kg$$
oraz
$$\frac{M}{m} = 1,4 \cdot 10^{80}.$$
Oznacza to, że we Wszechświecie mamy około 10^{80} atomów. W wyrażeniu na masę może występować współczynnik liczbowy, którego dokładnie nie znamy. Sądzi się jednak, że nie zmienia on powyższego oszacowania o więcej niż rząd wielkości.

Rozwiązanie zadania F 364.
Niech R oznacza promień Ziemi, M jej masę, r zaś promień orbity satelity. Uwzględniając prędkość v, z jaką porusza się satelita, wnioskujemy, że czas $\Delta t'$ wskazywany przez zegar pokładowy ulega spowolnieniu względem czasu Δt mierzonego przez nieruchomego obserwatora znajdującego się w nieskończoności zgodnie z zależnością
$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}.$$
Względem tego samego obserwatora zegary na Ziemi ulegają też spowolnieniu
$$\Delta t'' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}},$$
gdzie analogiczny czynnik z prędkością zegara umieszczonego na powierzchni Ziemi pominęliśmy, gdyż jest on znikomo mały. Z równania ruchu satelity
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$
dostajemy prędkość satelity
$$v^2 = \frac{GM}{r}.$$
Żądając, by był spełniony warunek $\Delta t' = \Delta t''$ otrzymujemy w przybliżeniu $r = \frac{3}{2}R$ (w rozwiązaniu kwadrat małego wyrazu $\frac{GM}{rc^2}$ można pominąć).