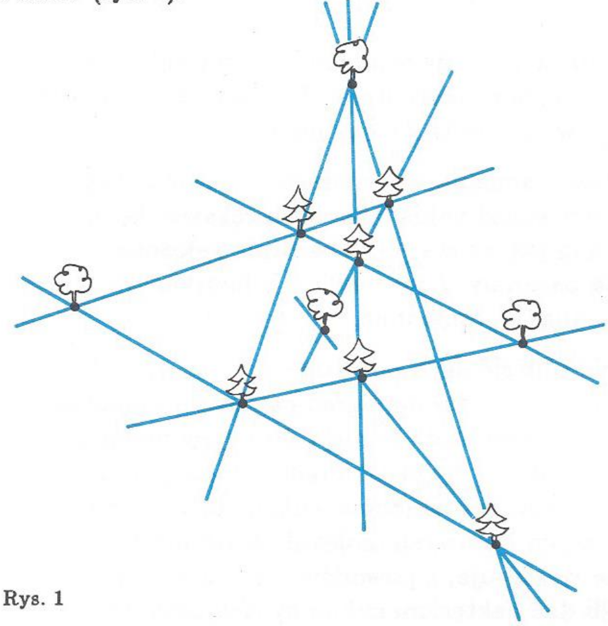
Symetryczne twierdzenia

Zdzisław POGODA

Czy w dziesięciu rzędach można tak posadzić dziesięć drzew, żeby w każdym rzędzie były dokładnie trzy drzewa? Oczywiście, jeśli wyobrazimy sobie rzędy jako równoległe grządki, to będzie kłopot z takim rozsadzeniem drzewek. Lecz gdy zrezygnujemy z równoległości rzędów (zachowując ich prostoliniowość), wtedy zadanie da się rozwiązać; otrzymujemy pewną konfigurację rzędów i drzew (rys. 1).



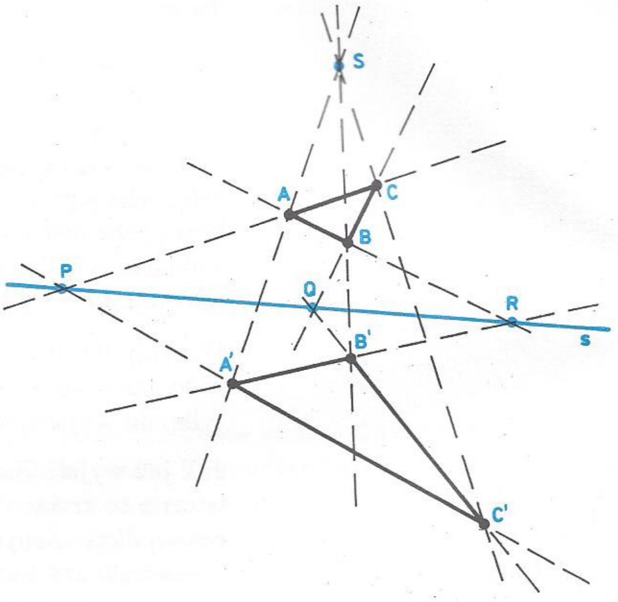
Rys. 1

A co by było, gdyby w treści zadania zamienić słowa „rzędy" i „drzewa" miejscami, naturalnie tak, żeby całość miała sens? Brzmiałoby to mniej więcej tak: jak przez dziesięć drzew poprowadzić dziesięć rzędów, aby każde drzewo znalazło się w dokładnie trzech rzędach?

Zauważmy, że zaproponowana konfiguracja jest także i w tym przypadku dobra. Odznacza się ona swoistą symetrią ze względu na rzędy i drzewa. Tłumacząc otrzymany układ na język prostych (rzędy) i punktów (drzewa) dostaniemy konfigurację nazywaną czasem konfiguracją Desarguesa. Jest ona graficzną ilustracją pewnego ważnego twierdzenia, znanego jako twierdzenie Desarguesa.

Twierdzenie to można sformułować w następujący sposób:
Jeśli proste przechodzące przez odpowiednie wierzchołki trójkątów ABC i $A'B'C'$ przecinają się w jednym punkcie (S), to proste będące przedłużeniami odpowiednich boków tych trójkątów przecinają się w punktach leżących na jednej prostej (s) (rys. 2).

Może się zdarzyć, że jakaś para prostych nie przetnie się; dla prostych równoległych umówimy się, że przecinają się w nieskończoności. Przy takiej umowie twierdzenie zachowa swój sens również i w szczególnych przypadkach.



Rys. 2

Co się stanie, gdy wykonamy podobny eksperyment jak w przypadku drzew i rzędów i zamienimy w twierdzeniu miejscami słowa „punkty" i „proste"? W szczególności stwierdzenie „trzy proste przecinają się w jednym punkcie" zostanie zastąpione przez zwrot „trzy punkty leżą na jednej prostej" i ogólniej „prosta przechodzi przez punkt" należy wymienić na „punkt leży na prostej". Ostateczny wynik jest taki, że założenia zamienią się miejscami z tezą. Powstanie jakby lustrzane odbicie twierdzenia Desarguesa. I to twierdzenie jest również prawdziwe; nazwano je odwrotnym twierdzeniem Desarguesa.

Punkt S z twierdzenia nazywa się środkiem perspektywy trójkątów ABC i $A'B'C'$, a prosta s osią perspektywy tychże trójkątów. Możemy się też umówić, że trójkąt to trzy niewspółliniowe punkty i trzy łączące je proste.

Przyglądając się tym określeniom zauważymy, że przy zamianie punkty↔proste definicja środka perspektywy przejdzie w definicję osi i odwrotnie, natomiast poprzednio „spreparowana" definicja trójkąta jest nieczuła na takie zmiany.

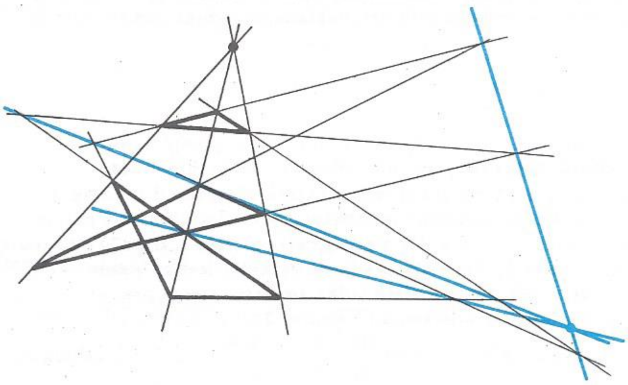
Twierdzenie Desarguesa możemy teraz sformułować elegancko:
Dwa trójkąty mają środek perspektywy wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywy.
Otrzymaliśmy twierdzenie odznaczające się ciekawą symetrią – zamieniając miejscami słowa „punkty" i „proste" (oraz odpowiednie zwroty) uzyskaliśmy to samo twierdzenie, tyle że lewa strona równoważności przejdzie na prawą i odwrotnie.

To dość niezwykłe zjawisko charakterystyczne jest dla pewnego działu geometrii zwanego geometrią rzutową.

Twierdzenia z geometrii rzutowej charakteryzują się tym, że konfiguracje, które je opisują, nie zmieniają się przy rzutowaniu z płaszczyzny na płaszczyznę. Tak właśnie zachowuje się konfiguracja Desarguesa: gdy zrzutujemy ją na inną płaszczyznę, to nietrudno zauważyć, że powstanie tam analogiczna konfiguracja. Ale inną cechą tej teorii jest jej swoista symetria ze względu na zamianę słów „prosta" i „punkt". Nie znaczy to, że każde twierdzenie ma tę własność co twierdzenie Desarguesa; zmiana powoduje, iż może powstać zupełnie nowe, nieoczekiwane zdanie, które jest również twierdzeniem geometrii rzutowej. Podobnie rzecz się ma z definicjami; z definicji jakiegoś obiektu otrzymujemy definicję na ogół innego obiektu czy też pojęcia geometrii rzutowej. Zauważmy, że obiektem „symetrycznym" do prostej traktowanej jako zbiór punktów będzie pęk prostych wyznaczonych przez ustalony punkt.

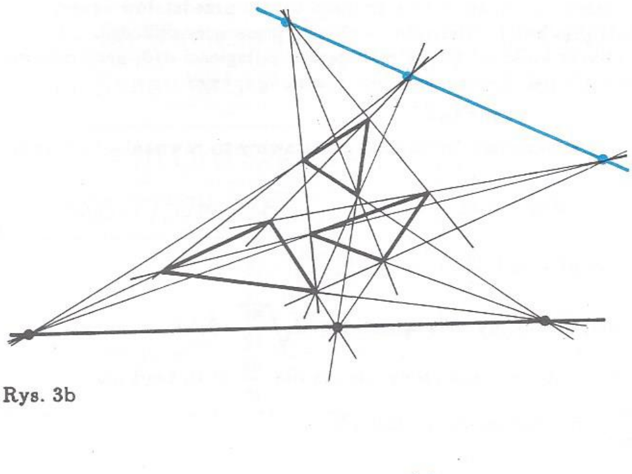
Opisane zjawisko nazwano zasadą dualności. Dodaje ona geometrii rzutowej osobliwego uroku.

Ilustracją może być wersja twierdzenia Desarguesa dla trzech trójkątów:
Jeśli odpowiednie wierzchołki trzech trójkątów leżą na trzech prostych przecinających się w jednym punkcie, to trzy osie perspektywy powstałe dla każdej pary trójkątów przecinają się w jednym punkcie (rys. 3a).



Rys. 3a

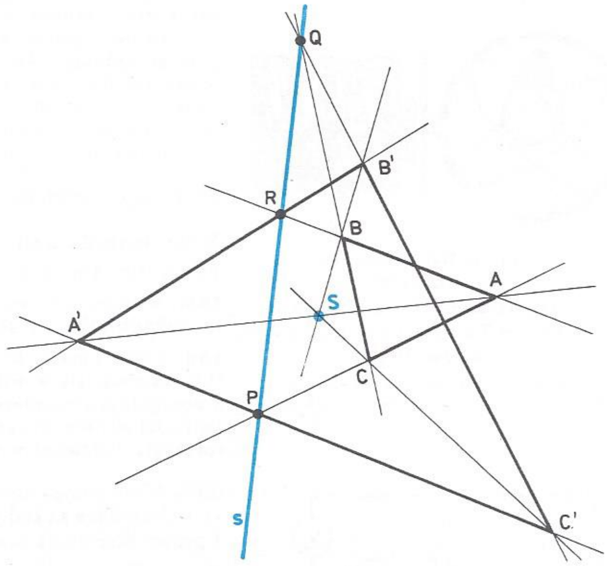
Tu „lustrzane odbicie" różni się od oryginału:
Jeśli odpowiednie boki trzech trójkątów przecinają się po trzy w trzech różnych współliniowych punktach, to trzy środki perspektywy powstałe dla każdej pary trójkątów leżą na jednej prostej (rys. 3b).



Rys. 3b

Dowody obu faktów są prostym zastosowaniem twierdzenia Desarguesa.

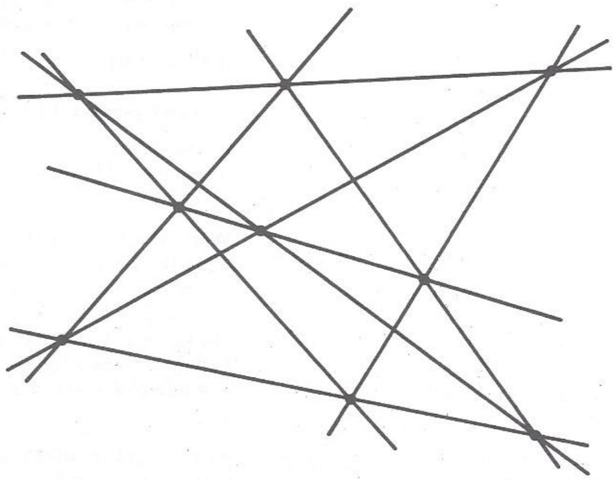
Wróćmy jeszcze na chwilę do konfiguracji Desarguesa. Ma ona jeszcze jedną niezwykłą cechę. Rolę środka perspektywy może grać dowolny punkt z konfiguracji wskazany przez nas. Potrafimy wtedy wyróżnić odpowiednie trójkąty i oś perspektywy (rys. 4).



Rys. 4

Podobnie dowolna prosta z konfiguracji może grać rolę osi perspektywy. Czy analogicznie zachowują się konfiguracje z pozostałych przedstawionych tu twierdzeń?

Na koniec jeszcze jedna konfiguracja zwana też konfiguracją Pappusa (rys. 5):



Rys. 5

Czytelnik zechce sam sformułować odpowiednie twierdzenie oraz twierdzenie dualne (czyli „symetryczne" do danego ze względu na zamianę prosta↔punkt). Tu także istnieje wersja w języku drzew i rzędów. Jaka?