Oczywiście, model jest w pełni deterministyczny. Naśladując idee Boltzmanna można do modelu wprowadzić losowość. W tym celu można przyjąć, że zbiór S nie jest zadany z góry, lecz, że każdy punkt $P_1, \ldots, P_n$, niezależnie od pozostałych, jest z prawdopodobieństwem $\beta = \frac{m}{n}$ zaliczany do S, gdzie β jest ustalone i mniejsze od $\frac{1}{2}$. Następnie można obliczyć wartość średnią różnicy $N_c(t) - N_b(t)$. Wynik jest następujący

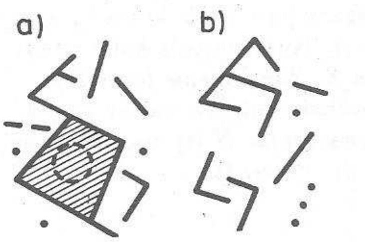
$$\langle N_c(t) - N_b(t)\rangle = (1-2\beta)^{n-|n-t|}(N_c(0) - N_b(0)).$$

Zatem dla n bardzo dużego liczby czarnych i białych kul będą się wyrównywały wykładniczo wraz ze wzrostem czasu t $(t < n)$, niezależnie od stanu początkowego. Jest to odpowiednik twierdzenia H Boltzmanna.

Otrzymany wynik wskazuje na źródło nieodwracalności – jest nim wprowadzenie do modelu elementów „pozamechanicznych": uśrednienia oraz przejścia granicznego, obcych indywidualnym układom mechanicznym. W modelu Kaca uśrednia się po zbiorach S i rozważa granicę przy $n \to \infty$. Jest to pełna analogia do modelu Boltzmanna. To sugeruje, że równanie Boltzmanna należy traktować jako „ścisłe w pewnym uśrednieniu". Niestety, tej intuicji – nawet dzisiaj, 120 lat po powstaniu teorii Boltzmanna – nie udało się nadać zadowalającego matematycznego kształtu. Należy przypuszczać, że zagadnienia te w dalszym ciągu będą wzbudzały silne emocje i gorące dyskusje (por. Prigogine i Stengers, *Z chaosu ku porządkowi*, PIW 1990).

Symetrie, symetrie, symetrie

Piotr HAJŁASZ

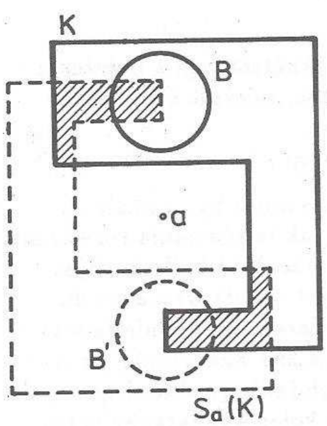


Rys. 1. Mówimy, że figura płaska ma niepuste wnętrze, jeżeli zawiera ona pewne koło. Figura na rysunku a) ma niepuste wnętrze, a na rysunku b) – puste.

Gdy mamy dowolny, np. bardzo „paskudny" zbiór, to wydaje się, że nie można dopatrzeć się w nim żadnych symetrii. Dlatego przeczy trochę naszej intuicji następujący fakt:

Dowolna płaska figura ograniczona o niepustym wnętrzu (tzn. zawierająca pewne koło) jest sumą skończonej liczby (niekoniecznie rozłącznych) figur środkowo symetrycznych.

Wbrew pozorom, dowód tego nie jest trudny. Figurę oznaczmy przez K, przez B zaś koło w niej zawarte. Niech ponadto S_a oznacza symetrię środkową względem punktu a. Nietrudno zauważyć, że figura $K \cap S_a(K)$ jest środkowo symetryczna. Ponadto figura ta zawiera tę część zbioru K, która jest przykryta przez koło $B' = S_a(B)$. Ponieważ figurę K można przykryć za pomocą skończonej liczby takich kół $S_{a_1}(B), \ldots, S_{a_n}(B)$ (przy odpowiednio dobranych $a_1, \ldots, a_n$), więc figura K jest sumą figur środkowo symetrycznych $K \cap S_{a_1}(K), \ldots, K \cap S_{a_n}(K)$.



Rys. 2. Część ciemna to $K \cap S_a(K)$. Jest ona środkowo symetryczna. Ponadto zbiór $K \cap B'$ jest podzbiorem $K \cap S_a(K)$.

Podobnie w innych pozbawionych symetrii sytuacjach możemy dowolny „obiekt" przedstawić za pomocą „obiektów symetrycznych". A oto przykład (niezbędne wyjaśnienia znajdują się na marginesie sąsiedniej strony).

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Wówczas każdą bijekcję $F : X \to X$ można przedstawić jako złożenie dwóch inwolucji.

Ktoś może zaprotestować. Nie ma tu przecież mowy o żadnej symetrii. My jednak odpieramy atak mówiąc, że słowo *symetria* pisaliśmy w cudzysłowie, a więc mieliśmy na myśli coś, co tylko w jakimś stopniu przypomina symetrię. A czy inwolucja przypomina symetrię? Zastanówmy się, co wyróżnia symetrie spośród izometrii. Otóż, symetrie to takie izometrie, które zastosowane dwukrotnie (dwukrotnie ta sama symetria) dają identyczność. Tak jest rzeczywiście dla symetrii względem punktu, prostej, płaszczyzny i... już dla żadnej innej izometrii (dlaczego?). A więc symetrie to te izometrie, które są inwolucjami. Śmiało więc możemy w przypadku dowolnego zbioru inwolucję uznać za prawidłowe uogólnienie symetrii.

Bijekcją nazywamy każde przekształcenie $F : X \to X$, które jest różnowartościowe i na. Natomiast inwolucja to takie nieidentycznościowe przekształcenie $S : X \to X$, że $S(S(x)) = x$ dla każdego $x \in X$ (symbolicznie $S \circ S = \mathrm{Id}$).

Nie będziemy dowodzić twierdzenia o postaci bijekcji $F : X \to X$. Dowód pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom (można go znaleźć w *Wiadomościach Matematycznych*, 22 (1980) str. 327). Nie jest on bardzo trudny. Zresztą zbyt trudny być nie może, bo skoro o zbiorze X niczego nie zakładamy, to nie mamy zbyt dużego wyboru w szukaniu rozwiązań. Główna trudność polega na umiejętności poruszania się w abstrakcyjnej sytuacji: skoro zbiór jest dowolny, więc trudno jest cokolwiek narysować i „zobaczyć".

Symetrie dostarczają też innego rodzaju niespodzianek. W *Wiadomościach Matematycznych* 23 (1980) zostało zamieszczone zadanie następującej treści:

Udowodnić, że jeśli F jest figurą ograniczoną (zawartą w płaszczyźnie), mającą środek symetrii należący do tej figury, to F nie można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające.

Praca Wojciechowskiego ukazała się w *Wiadomościach Matematycznych*, 27 (1986), str. 75-80, jej zaś skrót (jak każdej zwycięskiej w Konkursie), ukazał się w *Delcie* 1/1985.

Mimo iż Redakcja nie znała dowodu, to jednak teza wydawała się na tyle oczywista (no bo skoro niby oba składniki mają być przystające, to do obu „musi" należeć środek symetrii, co przeczy ich rozłączności), że zostało napisane „udowodnić", a nie „czy prawdą jest". No i niespodzianka. Michał Wojciechowski znalazł **kontrprzykład**, zdobywając dzięki temu złoty medal w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 1984 r. Oprócz owego kontrprzykładu wymyślił i udowodnił, tym razem już prawdziwe, następujące twierdzenie:

Figura ograniczona, zawarta w płaszczyźnie i zawierająca swój środek symetrii, nie może być przedstawiona jako suma dwóch rozłącznych figur przystających i środkowo symetrycznych.

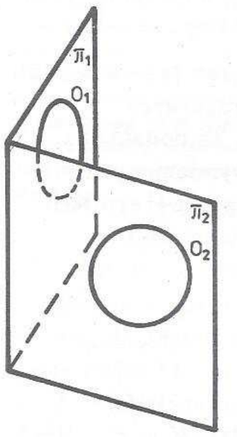
Zastosowanie symetrii bardzo często prowadzi do błyskotliwego rozwiązania zadania. Najprostszym przykładem jest następujące, powszechnie znane, zadanie:

Mamy dwa punkty A i B leżące po jednej stronie prostej p. Znaleźć na prostej p taki punkt C, aby suma odległości $AC + BC$ była najmniejsza.

Odbijamy punkt B symetrycznie względem prostej p i... każdy z Czytelników z pewnością widzi już rozwiązanie.

Nieco trudniejsze (choć niewiele) jest następujące zadanie:

Wewnątrz kąta ostrego dany jest punkt A. Znaleźć takie punkty B i C na obu ramionach tego kąta, aby obwód trójkąta ABC był najmniejszy.



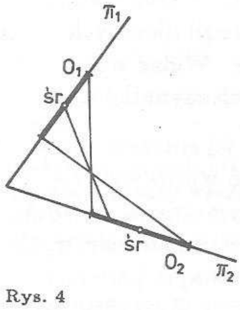
Rys. 3

Czytelnik z pewnością bez trudu rozwiąże to zadanie.

Powyższe dwa przykłady na zastosowanie symetrii w rozwiązywaniu zadań geometrycznych są standardowe, natomiast przykład przedstawiony poniżej jest zaskakujący i nietrywialny.

Udowodnić, że za pomocą samej linijki nie można skonstruować środka danego koła.

Dowód przedstawiony poniżej jest trudny. Trzeba mu się trochę poprzyglądać, zanim stanie się oczywiste, że jest on poprawny.



Rys. 4

Rozważmy dwie przecinające się płaszczyzny π_1 i π_2 (rys. 3). Niech narysowane na nich okręgi O_1 i O_2 będą symetryczne względem płaszczyzny dwusiecznej. Można wykazać, że okręgi O_1 i O_2 są przekrojami stożka o wierzchołku O (i eliptycznej podstawie) płaszczyznami π_1 i π_2, jak na rysunku 4 (intuicyjnie jest to prawie oczywiste, ale jak to ściśle wykazać?). Przypuśćmy, że potrafimy narysować środek okręgu O_1 za pomocą samej linijki. Jeśli będziemy linijką rysować proste w płaszczyźnie π_1, to przy rzutowaniu względem środka O będą one przechodzić na proste rysowane w płaszczyźnie π_2. A więc cała konstrukcja środka okręgu O_1 za pomocą linijki przejdzie przy rzutowaniu względem środka O na konstrukcję środka okręgu O_2. W szczególności środek okręgu O_1 przejdzie przy rzutowaniu względem O na środek okręgu O_2, co, jak widać na rysunku, nie jest prawdą.

Uzyskana sprzeczność dowodzi niewykonalności powyższej konstrukcji.