Łamanie symetrii

Jan KALINOWSKI

Symetrie w fizyce odgrywają olbrzymią rolę. Z własności niezmienniczości teorii względem symetrii wynika bowiem, jak wykazała to Emma Noether, istnienie praw zachowania. Prawa zachowania mają tę przyjemną cechę, że nawet bez dokładnej znajomości dynamiki procesów fizycznych możemy na ich podstawie wiele powiedzieć o możliwym zachowaniu układu fizycznego, w szczególności możemy wykluczyć niektóre zdarzenia. Na przykład: z niezmienniczości (symetrii) względem przesunięć w przestrzeni wynika zachowanie pędu układu, więc stany o innej wartości pędu niż początkowa są wykluczone.

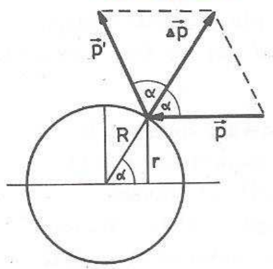
Warto może uściślić pojęcie symetrii, gdyż niezrozumienie jej istoty bardzo łatwo może doprowadzić nas do błędnych wniosków. Jako przykład rozpatrzmy ruch punktu w polu stałej siły. Wydawałoby się, że przesunięcie w przestrzeni $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{r}_0$ będzie transformacją symetrii takiego układu, gdyż równanie ruchu Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$ nie zmienia się względem tego przekształcenia. Gdyby tak rzeczywiście było, to pęd powinien być zachowany. Ale przecież pęd nie jest zachowany, gdy działa zewnętrzna siła. W twierdzeniu Noether pojęcie symetrii związane jest z wielkością zwaną działaniem: transformacja symetrii nie zmienia działania. Dla punktu materialnego poruszającego się w polu potencjalnym działanie jest całką względem czasu z różnicy energii kinetycznej i potencjalnej. Energia potencjalna zależy od położenia punktu materialnego, działanie więc nie jest niezmiennicze względem przesunięć. Siły zewnętrzne pochodzą z reguły od innych ciał, toteż rozszerzenie rozważanego układu tak, aby objął on źródła tych sił, może doprowadzić do znalezienia prawa zachowania pędu całego układu.

Symetrie związane z przesunięciami i obrotami w przestrzeni oraz przesunięciami w czasie charakteryzują wszystkie układy odosobnione. W konkretnych przypadkach układ fizyczny może mieć szerszą klasę symetrii. Te dodatkowe symetrie często nazywa się dynamicznymi w odróżnieniu od wymienionych powyżej, tzw. kinematycznych symetrii. Przykładu takiej dodatkowej symetrii może dostarczyć ruch keplerowski w polu grawitacyjnym z potencjałem $V \sim -1/r$. Z symetrii względem obrotów wynika zachowanie momentu pędu, to znaczy ruch musi być płaski. Gdy energia całkowita E jest ujemna, to ciało porusza się po elipsie. (Zwróćmy uwagę, że symetria obrotowa potencjału nie wyklucza rozwiązań nie mających tej symetrii.) Należy zauważyć, że ustawienie elipsy nie ulega zmianie w czasie. Nie jest to już prawda dla potencjałów zmieniających się inaczej niż $1/r$ (z wyjątkiem jedynie potencjału $V \sim r^2$). Ruch keplerowski charakteryzuje się więc dodatkową symetrią dynamiczną. Można wykazać (patrz np. *Mechanika klasyczna* G. Białkowskiego), że gdy zdefiniujemy odpowiednio dodatkową czwartą składową położenia i pędu, ruch keplerowski będzie miał symetrię względem obrotów w czterech wymiarach. Warto dodać, że dodatkowa, dynamiczna symetria występuje jedynie dla energii ujemnych. Dla ruchów po hiperbolach ($E > 0$) symetria ta nie występuje. Widać więc, że typ symetrii zależy nie tylko od postaci sił, ale też od innych czynników.

Do tej pory mówiliśmy o symetriach przestrzeni położeń (lub jej rozszerzeniach w przypadku symetrii dynamicznych). W fizyce bardzo często wprowadza się pojęcie symetrii wewnętrznych. Pod tym pojęciem kryją się symetrie w zupełnie abstrakcyjnych przestrzeniach parametrów. Na przykład: do opisu sił jądrowych protonu i neutronu wprowadza się izospin, pod względem formalnym podobny do momentu pędu. Izospin jest wielkością wektorową „żyjącą" w abstrakcyjnej trójwymiarowej przestrzeni izospinowej. Proton i neutron opisywane są jako stany jednej cząstki elementarnej, zwanej nukleonem, o izospinie 1/2. W mechanice kwantowej składowe wektora izospinu (i momentu pędu)

Rozwiązanie zadania F 861. Niech R oznacza promień kul, I zaś moc promieniowania przypadającą na jednostkę powierzchni. Siła, z jaką oddziałuje promieniowanie, jest związana ze zmianą pędu fotonów. Dla idealnie odbijającej kuli zmiana pędu wynosi

$$\Delta p = 2p\cos\alpha .$$



Rzut tej wartości na kierunek padania promieniowania wynosi

$$\Delta p_{\parallel} = 2p\cos^2\alpha .$$

Siła oddziaływania promieniowania na kulę jest równa

$$F_o = \int \frac{2I}{c}\cos^2\alpha\, dS_{\perp} ,$$

c – oznacza prędkość światła, a $dS_{\perp} = 2\pi r dr$ jest powierzchnią prostopadłą do strumienia światła. Podstawiając $r = R\sin\alpha$, $dr = R\cos\alpha d\alpha$ obliczamy

$$F_o = \frac{4\pi R^2}{c} I \int_0^{\pi/2} \cos^3\alpha \sin\alpha\, d\alpha = \frac{I}{c}\pi R^2 .$$

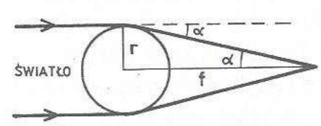
Dla ciała doskonale czarnego zachodzi $\Delta p = p$ (pochłanianie). Stąd siła F_c działająca na czarną kulę jest równa

$$F_c = \int \frac{I}{c} dS_{\perp} = \frac{I}{c}\pi R^2 .$$

Jak widać, na obie kule działają równe siły. Zauważmy, że dla krążków (zamiast kul) siły nie będą równe.

Rozwiązanie zadania F 862. Jeżeli galaktyka jako całość stanowi soczewkę grawitacyjną, możemy zająć się tylko jej brzegiem. Z równania ruchu dla gwiazd $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$ wyznaczamy $\frac{GM}{r} = v^2$, skąd otrzymujemy $\alpha = \frac{4v^2}{c^2}$. Ponieważ $f \operatorname{tg}\alpha = r$ (rys., f oznacza ogniskową), otrzymujemy

$$f = \frac{c^2 r}{4v^2} = 3{,}6 \text{ mld lat świetlnych}.$$



są skwantowane i dla izospinu 1/2 mogą przyjmować jedynie wartości $\pm 1/2$. Proton to nukleon z rzutem izospinu na dowolny kierunek $+1/2$, neutron to nukleon z rzutem izospinu $-1/2$. Stwierdzenie, że oddziaływania silne są niezmiennicze względem obrotów w przestrzeni izospinowej prowadzi do zasady zachowania izospinu w reakcjach jądrowych (tak jak niezmienniczość względem obrotów w zwykłej przestrzeni konfiguracyjnej prowadzi do zasady zachowania momentu pędu). Stąd można wyprowadzić wiele związków między różnymi procesami z protonami i neutronami.

Przeglądając tytuły artykułów lub książek naukowych bardzo łatwo natrafić można na słowo *symetria* w tytule. Ale często idzie ono w parze ze słowem *złamana*. Złamana symetria oznacza, że jej nie ma. Po co więc mówić o symetriach, których nie ma? Najpierw autorzy wprowadzają pewne symetrie do teorii, a następnie czynią wiele wysiłku, aby ich nie było.

Ścisła symetria teorii implikuje ścisłą zasadę zachowania. W przyrodzie występują różne procesy i oddziaływania. W niektórych pewne wielkości fizyczne są zachowane, w innych nie. Na przykład, izospin jest zachowany w oddziaływaniach silnych, a nie jest zachowany w oddziaływaniach elektromagnetycznych i słabych. Izospin nie jest więc zachowany i nie ma symetrii izospinowej. Ale w porównaniu z oddziaływaniami silnymi oddziaływania nie zachowujące izospinu dają niewielką poprawkę do siły oddziaływań jądrowych. Taka sytuacja, gdy możemy wyraźnie odróżnić oddziaływanie decydujące o przebiegu jakichś procesów fizycznych, i które wykazuje pewne symetrie, od innych, dających niewielkie poprawki i nie mających tych symetrii, jest dosyć typowa w fizyce, chemii, biologii. Pozwala to konstruować modele teoretyczne wychodząc najpierw z teorii ze ścisłą symetrią, aby opisać oddziaływanie dominujące. Następnie dodaje się do teorii człony łamiące symetrię w celu uwzględnienia innych oddziaływań. Współczynniki przy tych członach dają nam możliwość „kontrolowania, jak bardzo symetria jest złamana".

Łamanie symetrii przez dopisanie do teorii członów jawnie naruszających niezmienniczość nosi nazwę dynamicznego łamania symetrii. Jest jeszcze inny sposób łamania symetrii zwany spontanicznym. W zasadzie powinno się raczej używać terminu „symetria ukryta" zamiast „symetria spontanicznie złamana". Przykładu takiego łamania symetrii dostarcza teoria ferromagnetyzmu. Ferromagnetyk można wyobrażać sobie jako zbiór oddziałujących dipoli magnetycznych. Oddziaływania magnetyczne dipoli dążą do ustawienia ich równolegle. Zależą więc od ich wzajemnego ustawienia, ale nie wyróżniają żadnego bezwzględnego kierunku w przestrzeni. Są symetryczne względem obrotów w zwykłej przestrzeni konfiguracyjnej. Powyżej pewnej temperatury, zwanej temperaturą Curie (T_c), energia kinetyczna dipoli jest na tyle duża, że nie pozwala na ich wzajemną korelację. Stan ferromagnetyka wykazuje więc też symetrię obrotową. Jeżeli temperatura spadnie poniżej T_c, to oddziaływania dipoli są już na tyle silne, że porządkują ustawienie dipoli i ferromagnetyk ma pewne namagnesowanie wyróżniające jakiś kierunek w przestrzeni. Powyżej T_c wszystkie kierunki były takie same, żaden nie był wyróżniony, poniżej T_c ferromagnetyk „spontanicznie" wybiera jakiś kierunek magnetyzacji. Zwróćmy uwagę na to, że oddziaływanie dipoli nie ulega zmianie, dalej ma symetrię obrotową. W tym sensie teoria nadal jest symetryczna. To stan ferromagnetyka nie wykazuje symetrii. Mała istota żyjąca wśród dipoli miałaby wielkie kłopoty ze stwierdzeniem symetrii obrotowej oddziaływań dipoli widząc, że wszystkie dipole wskazują ten sam kierunek w przestrzeni. Dlatego byłoby lepiej mówić o ukrytej symetrii niż o spontanicznie złamanej.

Powyższe przykłady łamania symetrii wyglądają na bardzo proste. Idea łamania symetrii pozwala na opis szerokiej klasy zjawisk z symetriami przybliżonymi. Cała sztuka polega jednak na niezwykłym wyczuciu, co i kiedy jest zachowane i jakie człony należy dopisać do budowanej teorii, aby poprawnie opisać symetrie przybliżone.

Rozwiązanie zadania M 673.
Dokonamy obrotu krzywej o jedną ósmą część kąta pełnego, czyli o $\pi/4$:

$$x = X\cos\frac{\pi}{4} - Y\sin\frac{\pi}{4} = \frac{X-Y}{\sqrt{2}},$$

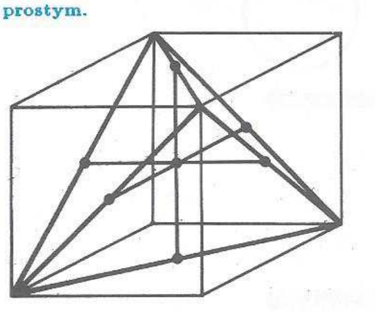
$$y = X\sin\frac{\pi}{4} + Y\cos\frac{\pi}{4} = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

Równanie krzywej można zapisać $(x^2-y^2)^2 + kxy(x^2-y^2) - 4x^2y^2 = 0$. Wówczas łatwo zauważyć, że powyższe przekształcenie zachowuje tę krzywą, a zatem krzywa po obrocie o kąt $\pi/4$ nie zmienia się. Stąd wynika, że części, na które krzywa dzieli okrąg $x^2+y^2=1$ zachowują się przy działaniu obrotu o $\pi/4$, a więc są równe. Sprawdźmy jeszcze tylko, ile jest punktów przecięcia; wstawmy w tym celu do równania krzywej $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Dostaniemy po przekształceniach równanie

$$4\cos 4\alpha + k\sin 4\alpha = 0,$$

które ma dokładnie 8 rozwiązań w przedziale $[0, 2\pi)$. Oznacza to, że krzywa dzieli okrąg na 8 równych części.

Rozwiązanie zadania M 674.
„Opiszmy" na czworościanie sześcian — w ten sposób, by każda krawędź czworościanu pokrywała się z przekątną jednej ze ścian sześcianu. Proste łączące środki skośnych krawędzi czworościanu będą wtedy po prostu osiami symetrii sześcianu, a te, oczywiście, przecinają się pod kątem prostym.



Rozwiązanie zadania M 675.
Dodając stronami wszystkie równania układu, a następnie dzieląc otrzymane równanie przez 4, dostaniemy

$$x + y + z + t + s = 3.$$

Teraz wystarczy po prostu odejmować od tego równania po kolei wszystkie równania układu, by otrzymać rozwiązanie: $s = -4$, $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$, $t = 0$.