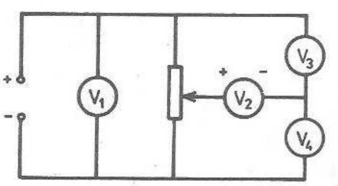
# Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 147 ($WT=1{,}60$) i 148 ($WT=4{,}00$)
z numeru 10/1992

Przemysław Gworys - Częstochowa 29,41
Tomasz Wietecha - Tarnów 28,92.




## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1993

Przypominamy treść zadań:

**155.** W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 wszystkie woltomierze są jednakowe. Ile wskazują $V_3$ i $V_4$, jeśli $V_1 = 12$ V, a $V_2 = 2$ V?

**156.** Ciało o masie $M$ porusza się swobodnie z prędkością $v_0$ w kierunku nieruchomej ściany. Gdy znajduje się w odległości $d$ od niej, następuje zderzenie z początkowo nieruchomą kulką o pomijalnych rozmiarach i masie $m$ znacznie mniejszej od $M$. Zakładamy, że dalszy ruch kulki zachodzi wzdłuż tej samej prostej, co ruch ciała, a jej zderzenia z ciałem i ścianą są doskonale sprężyste. Obliczyć w przybliżeniu (dla $m \ll M$) minimalną odległość zbliżenia ciała do ściany.

**155.** Nie wymaga komentarza równanie $V_3 + V_4 = V_1$. Drugie równanie wynika stąd, że woltomierze są **jednakowe** – zatem napięcia są proporcjonalne do prądów i spełniają I prawo Kirchhoffa zastosowane do węzła między woltomierzami:

$$V_2 + V_3 = V_4.$$

Jeśli woltomierze są elektrostatyczne, tzn. mają nieskończony opór wewnętrzny, wówczas to samo równanie otrzymujemy z zasady zachowania ładunku zakładając jednakową pojemność woltomierzy. Rozwiązaniem jest

$$V_3 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2) = 5\ \mathrm{V}, \qquad V_4 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) = 7\ \mathrm{V}.$$

**156.** Ponieważ $M \gg m$, więc możemy podzielić ruch ciała i kulki na dwa częściowo nakładające się etapy: 1) ciało porusza się w przybliżeniu jednostajnie, kulka podczas kolejnych zderzeń nabiera prędkości, 2) prędkość kulki jest znacznie większa od prędkości ciała, czyli kulka zachowuje się jak gaz przy sprężeniu adiabatycznym. Zajmijmy się najpierw wyprowadzeniem zależności między prędkością $v$ kulki a odległością $x$ ciała („tłoka") od ścianki w przybliżeniu określonym przez warunek 2), tzn. gdy prędkość $v_k$ kulki jest znacznie większa od prędkości $v_c$ ciała. Podczas każdego uderzenia o ciało kulka zwiększa swoją prędkość o $2v_c$ (znów przy założeniu $M \gg m$), a czas między uderzeniami wynosi $2x/v_k$. Zatem gdy ciało przesunie się o mały odcinek $dx$ w czasie $dx/v_c$, nastąpi $\frac{dx}{v_c} : \frac{2x}{v_k} = \frac{dx v_k}{2x v_c}$ uderzeń i całkowity przyrost prędkości kulki wyniesie $dv_k = \frac{dx v_k}{2x v_c} \cdot 2v_c = \frac{dx v_k}{x}$. W powyższych rachunkach pominęliśmy znaki – w rzeczywistości zmniejszeniu się $x$ towarzyszy wzrost $v_k$, więc należy w tej równości dopisać minus i całkując otrzymujemy szukaną zależność

$$v_k x = \mathrm{const}.$$

Wartość stałej znajdziemy rozpatrując etap 1). Jeśli ciało porusza się jednostajnie z prędkością $v_0$, to kulka po pierwszym zderzeniu uzyska prędkość $2v_0$, po drugim $4v_0$, po trzecim $6v_0$ itd. Odległości ciała od ściany najprościej jest wyliczyć dla momentów, gdy kulka odbija się od ściany (można uznać, że są to z grubsza środki przedziałów czasu, dla których kulka ma odpowiednią prędkość). Nietrudno wyliczyć (szczegóły obliczeń pomijamy), że przy pierwszym odbiciu kulki od ściany ciało jest w odległości $d/2$, przy drugim – w odległości $d/4$, przy trzecim – $d/6$ itd. Zatem stała jest równa $v_0 d$, czyli

$$v_k x = v_0 d.$$

Aby znaleźć minimalną odległość zbliżenia ciała do ścianki, podstawmy to równanie do zasady zachowania energii

$$Mv_c^2 + mv_k^2 = Mv_0^2.$$

Otrzymujemy

$$Mv_c^2 + m\left(\frac{v_0 d}{x}\right)^2 = Mv_0^2.$$

Kładąc $v_c = 0$ (ciało się zatrzymuje) dostajemy rozwiązanie $x = d\sqrt{\frac{m}{M}}$. Ścisłe rachunki numeryczne wykazują, że wynik ten jest nieco zawyżony, ale już dla $\frac{M}{m} = 10$ błąd nie przekracza 5%, natomiast dla $\frac{M}{m} = 50$ błąd spada poniżej 1%.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 247 ($WT$=2,45) i 248 ($WT$=1,52) z numeru 10/1992

| | | |
|---|---|---|
| Przemysław Gadziński | – Środa Śl. | 45,97 |
| Tomasz Wietecha | – Tarnów | 38,89 |
| Mirosław Matlęga | – Skoczów | 38,76 |
| Jerzy Janowicz | – Bolesławiec | 37,80 |
| Leszek Gasiński | – Stalowa Wola | 37,04 |

Pan Przemek Gadziński zalicza drugą rundę.

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1993

Przypominamy treść zadań:

**257.** Czworościan o krawędziach długości $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ jest wpisany w sferę o środku $O$ i promieniu $R$. Niech $O'$ będzie środkiem sfery przechodzącej przez środki ciężkości czterech ścian czworościanu. Obliczyć odległość punktu $O'$ od punktu $O$.

**258.** Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n > 0$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{s-x_i}\right)^{\alpha} \geq \frac{n}{(n-1)^{\alpha}},$$

gdzie $s = x_1 + \ldots + x_n$.

**257.** Oznaczmy przez $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ wierzchołki czworościanu, przez $S_i$ – środek ciężkości ściany nie zawierającej wierzchołka $A_i$, i weźmy pod uwagę wektory

$$\vec{v_i} = \overrightarrow{OA_i} \quad (i = 1,2,3,4) \text{ oraz } \vec{w} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}\vec{v_i}.$$

Wówczas $\overrightarrow{OS_1} = \frac{1}{3}(\vec{v_2}+\vec{v_3}+\vec{v_4}) = \vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v_1}$, i ogólnie

$$\overrightarrow{OS_i} = \vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v_i} \text{ dla } i = 1,2,3,4.$$

Punkt $Q$ wyznaczony przez równość $\overrightarrow{OQ} = \vec{w}$ spełnia związek $\overrightarrow{QS_i} = \overrightarrow{OS_i} - \overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{3}\vec{v_i}$ dla $i = 1,2,3,4$. Każdy z wektorów $\vec{v_i}$ ma długość $R$. Wobec tego $|QS_i| = \frac{1}{3}R$ dla $i = 1,2,3,4$, co oznacza, że punkt $Q$, jako jednakowo odległy od punktów $S_i$, pokrywa się z $O'$.

Tak więc szukana odległość równa się $|OO'| = |OQ| = |\vec{w}|$. Obliczamy:

$$9|\vec{w}|^2 = \left|\sum_{i=1}^{4}\vec{v_i}\right|^2 = \sum_{i=1}^{4}|\vec{v_i}|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 4}\vec{v_i}\cdot\vec{v_j} =$$
$$= 4R^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 4}(|\vec{v_i}|^2 + |\vec{v_j}|^2 - |\vec{v_i}-\vec{v_j}|^2) =$$
$$= 4R^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 4}2R^2 - \sum_{1\leq i<j\leq 4}|\vec{v_i}-\vec{v_j}|^2 =$$
$$= 16R^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2).$$

Stąd

$$|OO'| = |\vec{w}| = \frac{1}{3}\sqrt{16R^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)}.$$

**258.** Funkcja $\phi(x) = x/(s-x)$ jest rosnąca w przedziale $(0;s)$. Zatem funkcja $f(x) = (\phi(x))^{\alpha}$ jest w tym przedziale wypukła, bo jej pochodna $f'(x) = s\alpha(s-x)^{-2}\phi(x)^{\alpha-1}$ jest funkcją rosnącą. Stosując do funkcji $f$ nierówność Jensena otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) = nf\left(\frac{s}{n}\right) = n\left(\phi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^{\alpha} = \frac{n}{(n-1)^{\alpha}}.$$