Żeby dokładniej przyjrzeć się naszemu problemowi, ograniczymy dopuszczalne ciągi $\mathbf{n}$. W tym celu rozpatrzmy dla liczby pierwszej p następującą operację T_p: jeśli $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$, to można napisać $n_i = p^{\alpha_i} \cdot n_i'$, gdzie $\alpha_i \geq 0$ i $p \nmid n_i'$. Niech σ będzie taką permutacją liczb $1, \ldots, k$, że $\alpha_{\sigma(1)} \leq \alpha_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq \alpha_{\sigma(k)}$ i rozpatrzmy ciąg $n_i^* = p^{\alpha_{\sigma(i)}} n_i'$. Jeśli w ciągu tym wykreślić wyrazy równe 1, to otrzymany ciąg będzie właśnie wynikiem operacji T_p na ciągu $\mathbf{n}$. Okazuje się, że stałe d dla ciągów $\mathbf{n}$ i $T_p(\mathbf{n})$ są takie same. Poza tym, w wyniku skończonej liczby operacji T_{p_i} każdy ciąg $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ można doprowadzić do takiego ciągu $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$, że $m_1 | m_2 | \ldots | m_s$ (tzn. m_i jest dzielnikiem liczby m_{i+1} dla $i = 1, \ldots, p-1$) i ciąg $\mathbf{m}$ jest w ten sposób wyznaczony jednoznacznie (zainteresowany Czytelnik z pewnością bez trudu udowodni powyższe stwierdzenia). Będziemy taki ciąg $\mathbf{m}$ oznaczali przez $T(\mathbf{n})$. (Przykład: $(n_1, n_2, n_3) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 5.3 \cdot 5) \xrightarrow{T_2} (3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5) \xrightarrow{T_3} (2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5)$.)

Powyższe rozważania wykazują, że wystarczy zajmować się liczbami $d(n_1, \ldots, n_k)$ dla $n_1 | n_2 | \ldots | n_k$. Tak też będziemy w dalszym ciągu czynić.

Oszacujemy teraz liczbę $d(n_1, \ldots, n_k)$ od dołu. Wykażemy mianowicie, że $d(n_1, \ldots, n_k) \geq \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + 1$. Rozpatrzmy bowiem takie ciągi $\mathbf{a}_i$, że dokładnie $n_s - 1$ spośród nich ma postać $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, gdzie występuje dokładnie jedna jedynka na s-tym miejscu. Suma dowolnych spośród tych ciągów nie dzieli się przez $\mathbf{n}$ (dlaczego?).

Oczywiście, oszacowanie nasze jest prawdziwe dla dowolnego ciągu $\mathbf{n}$ (bez założenia, że $n_1 | n_2 | \ldots | n_k$). Łatwo jednak wykazać, że liczba szacująca jest dla ciągu $T(\mathbf{n})$ nie mniejsza niż dla $\mathbf{n}$. Dla $n_1 | n_2 | \ldots | n_k$ oznaczmy $D = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + 1$. Przez pewien czas przypuszczano, że $d = D$. Tak jest rzeczywiście, jeśli $k = 2$, albo jeśli wszystkie n_i są potęgami tej samej liczby pierwszej. Okazało się jednak, że na ogół $d > D$. Pierwszy przykład otrzymano rozpatrując $\mathbf{n} = (2, 2, 2, 2, 6)$. Otóż, w tym przypadku $D = 10$, natomiast $d \geq 11$.

Zauważmy, że równość $d = D$ dla $k = 2$ implikuje w szczególności twierdzenie EGZ. W rzeczy samej, jeśli $\mathbf{n} = (n, n)$ i weźmiemy $2n - 1$ ciągów $\mathbf{a}_i = (a_i, 1)$, to suma pewnych z nich jest podzielna przez n. Ale ich liczba musi być w takim razie równa n, bo suma drugich współrzędnych ma być wielokrotnością n. A stąd spośród liczb $a_1, \ldots, a_{2n-1}$ można wybrać n o sumie podzielnej przez n.

Znanych jest obecnie wiele $\mathbf{n}$, dla których $d > D$, ale niewiele wiadomo, jak dokładniej zachowuje się d. Ponadto wciąż nie wiadomo, czy $d = D$ dla ciągów $\mathbf{n}$ długości 3, tzn. dla $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, gdzie $n_1 | n_2 | n_3$ (np. dla ciągów $(3, 3, 15)$, $(5, 10, 10)$). Dla $k \geq 4$ wiadomo, że istnieją kontrprzykłady. Być może Czytelnikowi uda się znaleźć odpowiedzi (choćby częściowe) na postawione pytania bądź artykuł ten zainspiruje Go do postawienia innych, podobnych pytań i znalezienia na nie odpowiedzi.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 670. Udowodnić, że spośród dowolnych liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ można wybrać pewną ich liczbę, tak by ich suma była podzielna przez n.
Rozwiązanie na str. 7

M 671. Dla jakich dodatnich x część ułamkowa x, część całkowita x oraz sama liczba x tworzą ciąg geometryczny?
Rozwiązanie na str. 7

M 672. Udowodnić, że jeśli długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, to promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy różnicy owego ciągu.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

F 359. W pokoju o wymiarach 5 m $\times$ 4 m $\times$ 3 m pracuje komputer, którego ekran elektryzuje się. Natężenie pola elektrycznego w pobliżu ekranu osiąga wartość $E = 3000$ V/m. Ładunek ekranu jest zawsze dodatni. Jeżeli w powietrzu jest przewaga ładunków dodatnich, zakłóca to pracę układu nerwowego człowieka. Dyskomfort jest już odczuwany, gdy stężenie jonów przewyższa stokrotnie standardową jonizację powietrza wynoszącą $i = 20$ jonów/cm^3. Oszacować, co jaki czas trzeba przewietrzać pomieszczenie, aby nie odczuwać dyskomfortu.
Przewodność powietrza wynosi $\sigma = 2{,}5 \cdot 10^{-14}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$.
Rozwiązanie na str. 9

F 360. Oszacować, ile neutrin słonecznych przechodzi przez ciało człowieka w ciągu jednej sekundy. W ciągu jednego cyklu przemian termojądrowych powstają średnio 2 neutrina i wydziela się energia $E = 4 \cdot 10^{-12}$ J. Temperatura powierzchni Słońca wynosi $T \approx 6000$ K, promień Słońca $R = 695 \cdot 10^3$ km, odległość Ziemia–Słońce $d = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.
Rozwiązanie na str. 9