Tęcza

Grzegorz DERFEL

Tęcza jest dość powszechnym zjawiskiem meteorologicznym. Rzadko jednak występuje w pełnej krasie prezentując wszystkie szczegóły swojej budowy. Dlatego warto je wymienić.

Tęcza składa się z dwóch łuków. Łuk wewnętrzny, zwany pierwotnym, ma promień kątowy (kąt widzenia promienia okręgu, którego fragmentem jest ten łuk) około 42°, łuk zewnętrzny („wtórny") – około 50°. W łuku pierwotnym najbardziej wewnętrzną barwą jest fiolet, najbardziej zewnętrzną – czerwień. W łuku wtórnym kolejność barw jest odwrotna. Obszar między łukami stanowi pas wyraźnie ciemniejszy od reszty nieba. Wewnątrz łuku pierwotnego widoczne są czasem tak zwane łuki nadliczbowe, których najwyraźniejsze barwy to różowa i zielona. Środek wszystkich łuków leży na prostej przechodzącej przez Słońce i oko obserwatora. Wygląd tęczy bywa różny, zależnie od wielkości kropel: duże krople o średnicy 1–0,5 mm dają tęczę o jaskrawych barwach, bardzo małe (0,05 mm) dają tęczę niemal białą. Światło pochodzące od tęczy jest prawie całkowicie spolaryzowane w płaszczyźnie padania.

Wobec uroku tęczy nikt chyba nie pozostaje obojętny. Zainteresowanie nią ma jednak podłoże nie tylko estetyczne. Tęcza stanowiła wyzwanie dla uczonych wszystkich epok. Na liście tych, którzy poświęcili jej uwagę, znajdujemy wiele znakomitych nazwisk. Można powiedzieć, że historia poznania tęczy ilustruje historię fizyki.

Udokumentowane wysiłki naukowego wyjaśnienia tęczy liczą sobie ponad 2000 lat. Już Arystoteles (384–322 p.n.e.) podjął taką próbę. Ustalił, że tęcza nie jest obiektem materialnym, lecz powstaje w oku obserwatora dzięki odbiciu światła słonecznego od kropelek tworzących chmurę. Z badaniem tęczy wiąże się też jedno z pierwszych doświadczeń przeprowadzonych przy świadomym wykorzystaniu modelu. Teodoryk z Freiburga w 1304 r. użył kulistych naczyń szklanych napełnionych wodą do odtworzenia drogi, wzdłuż której światło rozchodzi się w kroplach deszczu. Uzyskał poprawne wyniki, lecz ich interpretacja jest z dzisiejszego punktu widzenia nie do przyjęcia. Mimo to dzieło Teodoryka *De iride* („O tęczy") pozostaje znaczące dzięki niescholastycznemu podejściu do problemu.

Nieprzemijającą wartość ma wyjaśnienie tęczy w ramach optyki geometrycznej podane w 1637 r. przez René Descartesa w traktacie *Les Météores*, poświęconym zjawiskom atmosferycznym. Podejście takie jest użytecznym przybliżeniem zamieszczanym dziś w wielu podręcznikach.

Dzięki pracochłonnym obliczeniom (z użyciem sformułowanego w 1621 r. przez Snella prawa załamania) Descartes znalazł drogi wielu promieni równoległych padających na kroplę w różnych jej punktach (to jest pod różnymi kątami). Promienie takie są pokazane na rysunkach 1 i 2 dla jednej barwy, dla której przyjęto współczynnik załamania $n = 1{,}33$. Pominięto promienie odbite i załamane, nie biorące udziału w tworzeniu tęczy.

Współpraca człowieka z maszyną

Jan RUSINEK

Już blisko 200 lat temu pojawiły się po raz pierwszy maszyny grające w szachy. Były to jednak tylko mistyfikacje, bowiem we wnętrzu maszyny siedział człowiek i tylko obsługiwał urządzenie. Mimo tego zdobyły sobie one wielki rozgłos – poświęcano im nawet utwory literackie, a jeden z nich – opowiadanie A. Niemojewskiego *Szach i mat* doczekało się wersji filmowej, pokazywnej m.in. kilkakrotnie w naszej telewizji.

Pierwszą prawdziwą maszynę grającą w szachy skonstruował na początku XX wieku hiszpański wynalazca L. Torres y Quevedo. Maszyna ta potrafiła dawać mata samotnemu królowi za pomocą króla i wieży. Każdy grający w szachy wie, że algorytm dawania mata tymi dwiema figurami jest wyjątkowo prosty i łatwy.

Pierwsze maszyny potrafiące zmierzyć się z człowiekiem jak równy z równym pojawiły się dopiero wraz z burzliwym rozwojem informatyki w latach 70. Początkowo mogły one toczyć równą walkę tylko z amatorami, ale bardzo szybko ich siła gry zaczęła wzrastać i obecnie najlepsze z nich są w stanie nawiązać walkę nawet z czołówką światową. Często organizatorzy turniejów w celu uatrakcyjnienia imprezy dopuszczają do gry komputery i dziś już chyba nie ma na świecie dobrego szachisty, który by nie przegrał choć raz (a przynajmniej nie miał poważnych kłopotów) z komputerem szachowym – może poza aktualnym mistrzem świata, Garri Kasparowem, który na razie spektakularnie wygrywa z komputerami wszystkie partie godnie broniąc honoru rodzaju ludzkiego.

Spore są też osiągnięcia komputerowe w pracach nad teorią szachów.

1

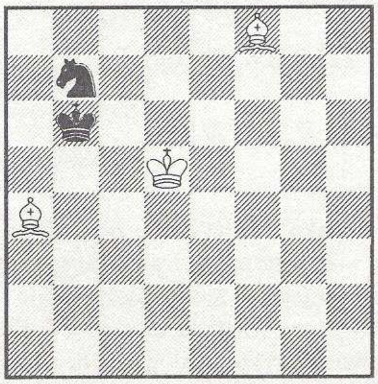
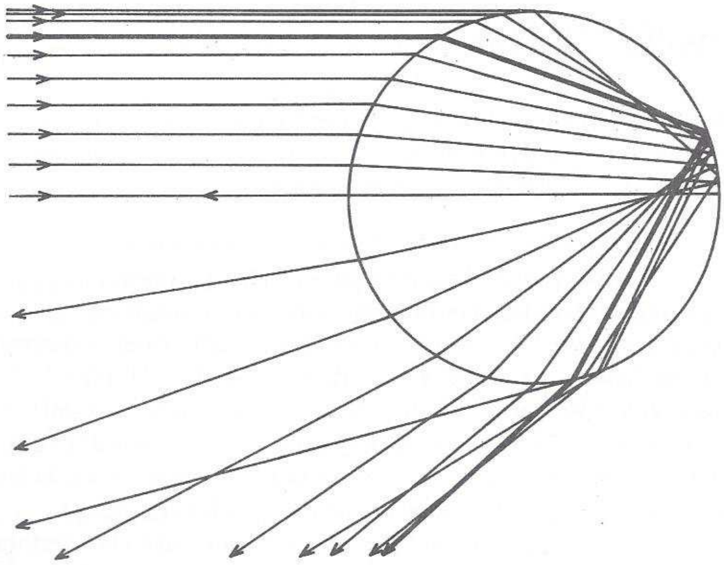


Diagram nr 1 przedstawia teoretyczną pozycję jeszcze z XIX wieku, która przez ponad 100 lat uchodziła za remisową. Amerykański programista, Ken Thompson, napisał w 1986 roku specjalny program na końcówkę 2 gońce przeciwko skoczkowi (bez pionów) i program ten wykazał, że dwa gońce **zawsze** wygrywają. Między innymi wygrana jest też pozycja nr 1 – przy czym w niektórych pozycjach z takim układem sił do osiągnięcia wygranej potrzeba ponad 60 posunięć.

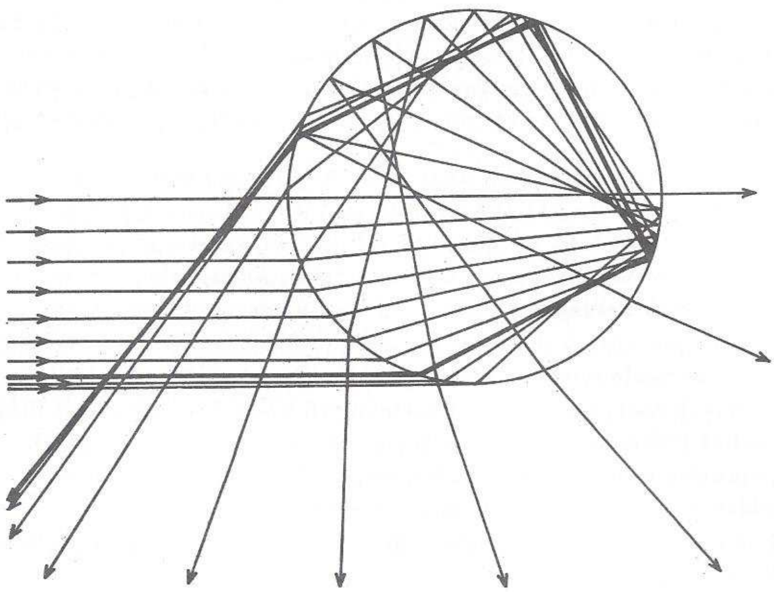
Wielką rolę odgrywają komputery w tzw. **kompozycji szachowej**. Kompozycja szachowa jest to jakby dziedzina sztuki, która posługuje się językiem szachów (tak jak np. malarstwo posługuje się językiem barw i kształtów, a muzyka językiem dźwięków). Na pewno każdy spotkał się na łamach rubryk szachowych z różnego typu zadaniami szachowymi, jak **Mat w określonej liczbie posunięć** lub **Wygrana** czy **Remis**. Najbardziej nieprzyjemną i niewdzięczną pracą autorów zadań szachowych jest sprawdzanie ich poprawności. Bowiem zadanie, aby było wartościowe, musi mieć dokładnie jedno (akurat to zaplanowane przez autora – ciekawe i zaskakujące) rozwiązanie. I właśnie człowieka w tym sprawdzaniu zaczynają na dobre zastępować komputery. Autor może więc więcej czasu poświęcić na pracę bardziej twórczą – na wymyślanie nowych idei i pomysłów, a komputer robi za niego „czarną robotę". Jeśli chodzi o zadania w małej liczbie posunięć (do 5–6), to nawet

Rysunek 1 przedstawia bieg promieni po jednokrotnym odbiciu we wnętrzu kropli.



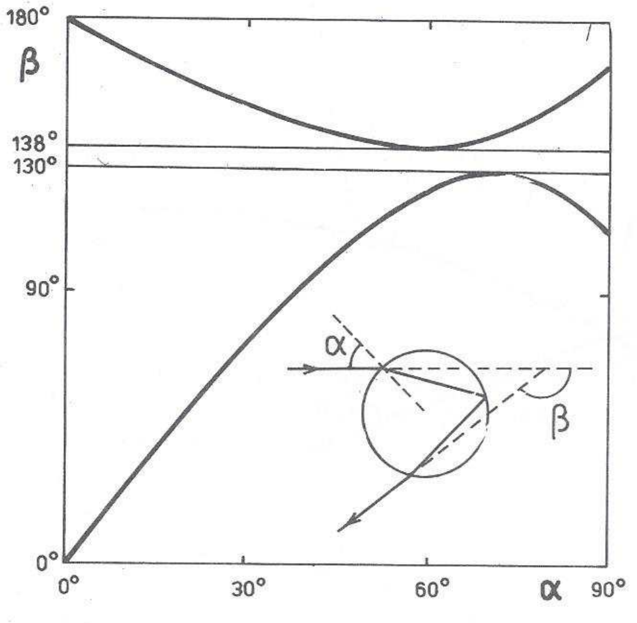
Rys. 1

Dają one łuk pierwotny. Łuk wtórny powstaje po dwukrotnym odbiciu przedstawionym na rysunku 2.



Rys. 2

Na obu rysunkach widać, że podczas gdy kąt padania α przyjmuje wszystkie możliwe wartości, to kąt rozproszenia β (między promieniem padającym na kroplę i wychodzącym z niej) nie spada poniżej $\beta_1 = 130°$ przy jednokrotnym odbiciu i nie przewyższa $\beta_2 = 138°$ przy odbiciu dwukrotnym. Prawidłowości te przedstawia rysunek 3. Dzięki temu spostrzeżeniu staje się zrozumiałe istnienie ciemnego pasma oddzielającego łuki. Każda kropla, rozpraszając wiązkę promieni, wysyła je w dość znaczny kąt bryłowy, tak że do oka światło dochodzi z dużego obszaru nieba rozciągającego się pod i nad ciemnym pasmem. Trzeba więc wyjaśnić, dlaczego tęcza jest bardzo wąska.



Rys. 3

W sąsiedztwie ekstremalnych kątów β_1 i β_2 („kątów tęczowych"), w tym samym kierunku wysyłanych jest wiele promieni rozproszonych. Powoduje to zwiększenie natężenia światła dochodzącego do obserwatora z tego kierunku. Mamy tu do czynienia z utworzeniem przez promienie ekstremalnie odchylone powierzchni kaustycznej (*kaustikos* – palący). Dzięki podobnemu zjawisku koncentracji promieni powstaje znany każdemu obrazek widoczny na dnie kubka przy odbiciu światła od jego ścianek. Tęcza jest więc widoczna dzięki temu, że jest kaustyką. Zauważmy, że strumień energii wchodzący do kropli w przedziale kątów $d\alpha$ wychodzi z niej w przedziale kątów $d\beta$. Natężenie światła wychodzącego rośnie więc ze wzrostem $|d\alpha/d\beta|$. Dokładnie przy kącie tęczowym, gdy $|d\beta/d\alpha| = 0$, natężenie światła powinno być nieskończenie duże. Ten kłopotliwy wynik jest konsekwencją przybliżonego charakteru optyki geometrycznej.

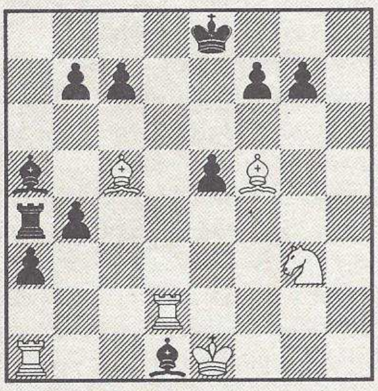
Powtórzenie tego rozumowania dla każdej barwy światła z uwzględnieniem właściwego dla niej współczynnika załamania wyjaśnia sekwencję barw w łukach pierwotnym i wtórnym. Takie wytłumaczenie tęczy jest przekonujące, chociaż przewiduje nieskończone natężenie światła i nie wspomina o łukach nadliczbowych.

Dla usunięcia tych mankamentów trzeba uwzględnić falową naturę światła. Pierwsza falowa teoria tęczy pochodzi od Thomasa Younga, który w 1804 r. wyjaśnił istnienie prążków nadliczbowych interferencją fal wychodzących z kropli. Bardziej wnikliwie rozwiązał to zadanie George B. Airy w 1838 r., który przeprowadził obliczenia stosując zasadę Huygensa do czoła fali opuszczającej kroplę. Przekrój tego czoła płaszczyzną przechodzącą przez środek kropli ma kształt litery S, dobrze przybliżony krzywą trzeciego stopnia, z punktem przegięcia w miejscu przechodzenia promienia

mikrokomputery radzą sobie z nimi bez trudu. Gorzej jest z zadaniami dłuższymi – wówczas nawet duże maszyny są za wolne i czas potrzebny do pełnego rozwiązania staje się zbyt długi. Potrzebne są wówczas pewne pomysły pozwalające ten czas skrócić. Czasami prosty pomysł daje znakomite efekty. Taki przykład zademonstruję poniżej.

Zastanówmy się nad tym, jak działa program rozwiązujący zadanie szachowe. Przypuśćmy, że mamy do rozwiązania zadanie **Mat w 2 posunięciach**. Załóżmy, że białe mają k pierwszych ruchów: $b_1, b_2, \ldots, b_k$; na każdy ruch b_i czarne mają l_i odpowiedzi $c_{i1}, \ldots, c_{il_i}$ i z kolei na każdy ruch c_{ij} jest m_{ij} ruchów białych $b_{ij1}, \ldots, b_{ijm_{ij}}$. Komputer rozważa ruch b_1 i sprawdza kolejno ruchy czarnych $c_{11}, c_{12} \ldots$ itd. i jeśli po którymś z nich (np. c_{1j}) okaże się, że żaden drugi ruch białych b_{1jp} nie jest matujący, to dalszych ruchów czarnych już nie sprawdza, bo wiadomo, że wówczas ruch $1.b_1$ nie jest rozwiązaniem i komputer przechodzi do badania ruchu b_2. Widać z tego, że czas zużyty na analizę danego ruchu białych zależy od tego, jak prędko komputer natrafi na skuteczną odpowiedź czarnych. Co należy zatem zrobić? Trzeba tak ułożyć program, aby rozpoczynał on badanie od silnych ruchów czarnych. Ale skąd komputer ma wiedzieć, które ruchy są silne? Otóż statystycznie rzecz biorąc silne są posunięcia szachujące, bicia, dorobienia figury, ruchy silnymi figurami (hetmanem, wieżą). I tak jest też ułożona większość dobrych programów – rozpoczynają one analizę od statystycznie silnych posunięć. Czasami jednak „statystycznie silny" ruch nie jest najlepszy. Co wówczas zrobić? Ciekawy, choć prosty pomysł zastosował fiński programista, Ilkka Blom, w swoim programie ALYBADIX służącym do rozwiązywania zadań. Pomysł ten pozwala na „współpracę" człowieka z komputerem, w niektórych przypadkach znacznie skracającą czas rozwiązania. Otóż w swojej nowej wersji tego programu uzależnił on kolejność rozpatrywania ruchów od kolejności wprowadzania figur do pamięci komputera. Pozwala to człowiekowi wpływać na czas rozwiązywania poprzez wybór dla każdego zadania optymalnej (tu trzeba się trochę znać na szachach) kolejności. Aby zademonstrować, jak ten pomysł okazał się efektywny, popatrzmy na diagram 2.

2. K. Wenda, 1966

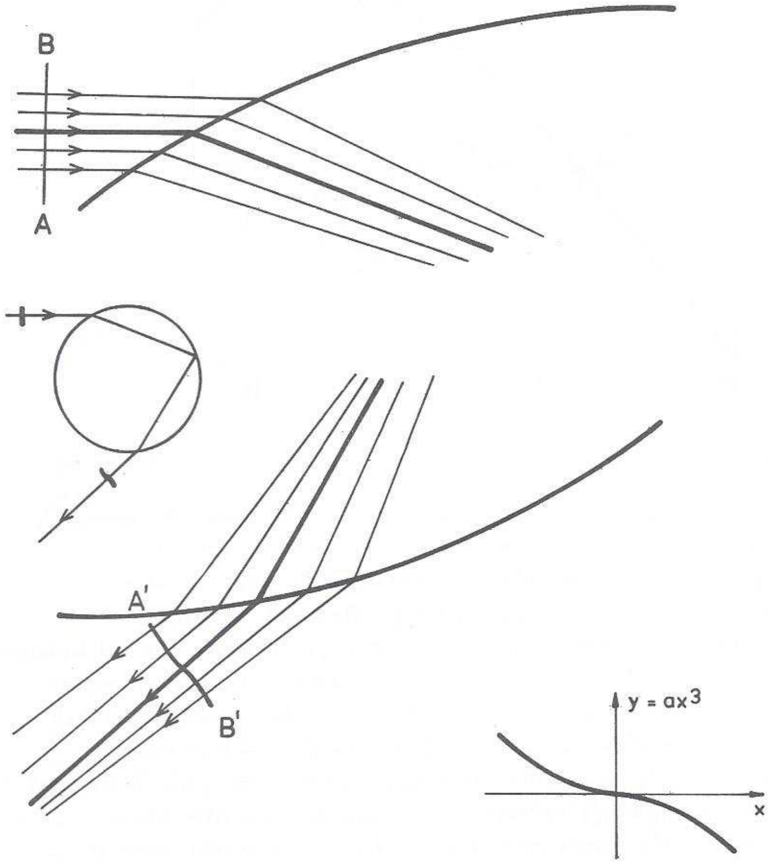


Mat w 6 posunięciach

Program ALYBADIX na komputerze 386DX 33MHz przy standardowym wprowadzaniu na szachownicę figur, tzn. najpierw król, potem hetman itd. – na końcu pionki, rozwiązywał to zadanie 1 godzinę 55 minut. Jednak pobieżna analiza pokazuje, że w pozycji diagramu bardzo silnym posunięciem czarnych jest ruch 1. ... *b*4 – *b*3 włączający do gry wieżę i gońca. Zatem trzeba wprowadzanie czarnych figur rozpocząć od pionka *b*4. I rzeczywiście – przy takiej kolejności czas rozwiązywania wyniósł 9 minut 40 sekund, a więc był 12 razy krótszy! (Rozwiązanie zadania 2 jest następujące: 1.Sh5! G:h5 2.Gd7+ Kd8 3.Gg4+! Ke8 4.0-0-0 c6 5.Wd8+ G:d8 6.Gd7×, lub 4. ... *f*6 5.Gh5+ g6 6.G:g6×.)

Następny przykład jeszcze dobitniej pokazuje, jak wiele zależy od pomysłowości człowieka piszącego algorytm programu. Jednym z działów kompozycji szachowej są tzw. **maty pomocnicze**. W zadaniach tego typu zaczynają czarne i obie strony dążą do zamatowania czarnego króla. Jest to chyba najbardziej matematyczny rodzaj zadań szachowych, bowiem zadanie

ekstremalnego. Rysunek 4 pokazuje, jak płaskie czoło AB fali padającej zostaje zastąpione przez wygięte czoło $A'B'$ fali wychodzącej z kropli.

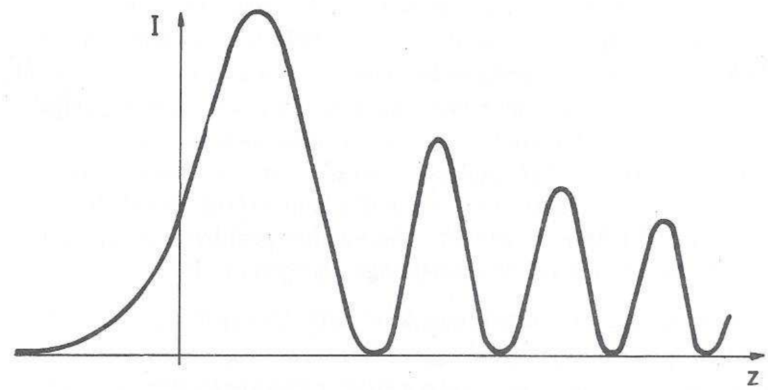


Rys. 4

Zbieżność promieni po jednej stronie promienia tęczowego i ich rozbieżność po drugiej oraz wygięcie linii $A'B'$ są celowo przesadzone, aby wyraźniej przedstawić charakter zjawiska. Sumowanie fal pochodzących od wszystkich punktów czoła $A'B'$ (przy założeniu, że amplituda jest wszędzie na tym czole jednakowa) prowadzi do wyrażenia na względne natężenie I światła w zależności od kąta Θ mierzącego odchylenie promienia od kierunku ekstremalnego. Natężenie to jest proporcjonalne do kwadratu tzw. całki tęczowej Airy'ego

$$f(z) = \int_0^\infty \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(u^3 - zu\right)\right] du\,.$$

(Nazwa „funkcja Airy'ego" używana jest częściej dla całki o nieco innej postaci.) Zmienne u i z są związane z kątem Θ i współrzędną x punktu na froncie falowym oraz zależą od współczynnika załamania, promienia kropli, liczby odbić wewnętrznych i od długości fali. Dzięki temu wykres $I(z)$, pokazany na rysunku 5, ma charakter uniwersalny.



Rys. 5

Funkcja ta ma kilka cech, które lepiej odzwierciedlają rzeczywistość niż teoria geometryczna. Najwyższe maksimum odpowiada łukowi pierwotnemu i zastępuje nieskończone natężenie. Kolejne maksima dają łuki nadliczbowe. Zanik natężenia od strony ciemnej zachodzi nie skokowo, lecz płynnie. Kąt maksimum głównego jest nieco różny od kąta tęczowego. Ze wzrostem promienia kropli oraz przy zmniejszaniu długości fali kąty między sąsiednimi maksimami zmniejszają się. Nałożenie się rozkładów dla wszystkich długości fal daje barwną tęczę, której wygląd zależy od wielkości kropel. Istotne jest przy tym względne natężenie danej barwy w widmie słonecznym, a także skończona średnica kątowa Słońca.

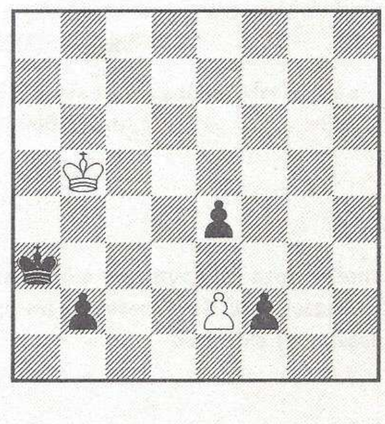
Teoria Airy'ego była wielokrotnie porównywana z doświadczeniem w warunkach laboratoryjnych. Doświadczenia te często były dowodem wielkiego kunsztu eksperymentatorów. Felix Billet, na przykład, wykonał w latach 1863–1868 serię doświadczeń, w których badał tęczę powstałą na cienkich strużkach wody. Był w stanie zaobserwować tęcze 19 rzędów, a łuki nadliczbowe w 11 z nich. Stwierdzona zgodność położeń maksimów obserwowanych i obliczonych sprawiła, że teoria Airy'ego zyskała miano „kompletnej" teorii tęczy. Trzeba jednak pamiętać, że ona także stanowi przybliżenie dające wyniki słuszne ilościowo tylko dla kropli dużych ($R > 0{,}5$ mm) i dla kątów różnych od tęczowego o nie więcej niż $0{,}5°$. Poza tymi granicami rozkład natężenia $I(z)$ światła może być traktowany jako przybliżenie jakościowe.

Teoria Airy'ego ma również pewne inne niedostatki. Przypadkowa bliskość wartości kąta padania promienia tęczowego wewnątrz kropli (40°) i kąta Brewstera (kąt padania, dla którego promień odbity jest prostopadły do załamanego) dla granicy woda-powietrze (37°) jest odpowiedzialna za polaryzację tęczy. Teoria Airy'ego nie bierze pod uwagę polaryzacji przy odbiciu. Dlatego porównanie $I(z)$ z rozkładem światła spolaryzowanego w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny padania ujawnia istotne rozbieżności, także jakościowe. Stosunkowo niedawno wykazano, że modyfikując teorię Airy'ego można uzyskać poprawne wyniki dla obu polaryzacji (S.D. Mobbs, *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1089 (1979)). Oprócz światła odbitego wewnątrz kropli uwzględniono światło odbite od jej zewnętrznej powierzchni. Natężenia światła spolaryzowanego w płaszczyźnie padania oraz w płaszczyźnie prostopadłej do niej wyliczono dzięki współczynnikom odbicia danym wzorami Fresnela.

takie to po prostu zadanie konstrukcyjne na temat: **wykorzystując reguły obowiązujące w szachach skonstruować pozycję matową w *n* posunięciach.** Czas rozwiązywania takich zadań przez komputery jest bardzo długi, bowiem komputer musi badać wszystkie posunięcia czarnych (i oczywiście białych) i nie może, tak jak w przypadku omawianym powyżej, przerwać analizy po „silnym ruchu czarnych". Zadania w większej liczbie posunięć niż 4 – nawet bardzo proste, są nie do rozwiązania w sensownym czasie.

Dlatego wspomniany już Ilkka Blom postanowił zastosować algorytm oparty na metodzie rozwiązywania zadań przez człowieka. Otóż wprawny specjalista od rozwiązywania zadań nigdy nie rozwiązuje matów pomocniczych sprawdzając ruch po ruchu. Robi to „od końca". Najpierw stara się skonstruować pozycję matową za pomocą materiału obecnego na szachownicy, a jeśli mu się to uda, to szuka zgodnej z regułami gry drogi do tej pozycji. Jak zwierzył się autor programu, praca nad takim algorytmem trwała wiele lat (niełatwo jest imitować rozumowanie człowieka!), ale program ten (nazwany przez autora HELPBADIX INTELLIGENT!) okazał się w przypadku niektórych zadań rewelacyjny.

3. T. Kardos, 1956



Mat pomocniczy w 7 posunięciach

Czas rozwiązywania zadania nr 3 na wspomnianym komputerze przez standardową wersję programu ALYBADIX (tzn. sprawdzającą ruch po ruchu) wyniósłby około 20 000 godzin!

Zauważmy, że na szachownicy są tylko dwie białe bierki mające do dyspozycji przez całą grę około 7 posunięć – na przykład przy podobnych czterech białych bierkach czas byłby już około 2^7 razy dłuższy (dlaczego?), a przy większej liczbie czas byłby długi niewiarygodnie.

Natomiast program HELPBADIX INTELLIGENT rozwiązał powyższe zadanie w 1 godzinę 22 minuty. (Rozwiązał, tzn. znalazł rozwiązanie i sprawdził, że nie ma innych.) (Rozwiązanie zadania 3 – w matach pomocniczych przyjęło się rozpoczynać numerowanie posunięć od ruchu czarnych! – 1.f1W e3 2.Wf4 ef4 3.e3 f5 4.e2 f6 5.e1W f7 6.Wa1 f8W 7.Wa2 Wf3×.)

Przykłady te pokazują z jednej strony nieocenioną pomoc, jaką mogą oddać człowiekowi komputery, a z drugiej wielce dla nas budującą tezę, że jednak „decydujące posunięcie" należy do człowieka i że największe sukcesy ma komputer tam, gdzie z człowiekiem współpracuje lub gdzie „próbuje" go naśladować.

Problem rozkładu natężenia światła w tęczy można także rozwiązać ściśle wykorzystując teorię niemieckiego fizyka Gustawa Mie, który w 1908 r. wykazał, że natężenie fali elektromagnetycznej rozproszonej na kuli może być obliczone z dowolną dokładnością dla dowolnego kąta rozproszenia. Natężenie może być przedstawione jako suma szeregu składników o dość złożonej postaci reprezentujących fale cząstkowe. W przypadku tęczy zachodzi konieczność uwzględnienia kilku tysięcy składników szeregu. Niebanalny problem stanowi przy tym znalezienie jak najefektywniejszego algorytmu obliczeń.

Możliwość uzyskania ścisłych wyników numerycznych nie oznacza końca teoretycznych prac nad tęczą. Ważnym osiągnięciem jest zaadaptowanie do jej opisu aparatu matematycznego stosowanego w teorii rozproszenia cząstek. Zaproponowano także powiązanie wyglądu naturalnej tęczy z rozkładem wielkości kropel deszczu oraz z elipsoidalnym spłaszczeniem największych spośród nich.

Ciekawa tożsamość

Udowodnimy następującą zaskakującą tożsamość

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k - 5^k - 6^k + 7^k + 8^k - \ldots \pm (2^n - 1)^k = 0,$$

gdzie k, n $(k < n)$ są dowolnymi liczbami naturalnymi oraz składnik m^k występuje ze znakiem plus, jeśli w zapisie dwójkowym liczby m występuje nieparzysta liczba jedynek i ze znakiem minus w przeciwnym przypadku.

Dowód. Proste wymnożenie prowadzi do tożsamości

$$1 - (1 - e^x)(1 - e^{2x})(1 - e^{4x})\ldots(1 - e^{2^{n-1}x}) =$$
$$= e^x + e^{2x} - e^{3x} + e^{4x} - e^{5x} - \ldots - (-1)^n e^{(2^n-1)x}.$$

Nietrudno przekonać się, że znak przy składniku e^{mx} po prawej stronie jest taki sam jak znak przy m^k w wyrażeniu z treści zadania.

Zróżniczkujmy powyższą równość k-krotnie $(k < n)$, a następnie podstawmy $x = 0$. Ponieważ k-ta pochodna e^{mx} jest równa $m^k e^{mx}$, więc po podstawieniu $x = 0$ po prawej stronie otrzymamy badane wyrażenie

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k - 5^k - \ldots - (-1)^n (2^n - 1)^k.$$

Teraz zbadamy lewą stronę.

Po lewej stronie różniczkujemy iloczyn złożony z n czynników. Stosując k-krotnie wzór na pochodną iloczynu otrzymamy, że k-ta pochodna lewej strony jest równa sumie wyrażeń postaci

$$-(1 - e^x)^{(k_1)}(1 - e^{2x})^{(k_2)}\ldots(1 - e^{2^{n-1}x})^{(k_n)},$$

gdzie $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, a przez $(1 - e^{2^{m-1}x})^{(k_m)}$ oznaczyliśmy k_m-tą pochodną wyrażenia $1 - e^{2^{n-1}x}$.

Ponieważ $k < n$, więc dla pewnego m zachodzi $k_m = 0$. Oznacza to, że w powyższym iloczynie czynnik $(1 - e^{2^{m-1}x})$ nie jest różniczkowany. Po podstawieniu $x = 0$ czynnik ten będzie równy 0, a stąd i cała lewa strona będzie równa 0. Porównując ją z prawą stroną otrzymujemy tezę.

Paweł STRZELECKI