Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 245 (WT=2,93) i 246 (WT=2,58) z numeru 9/1992

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	42,00
Marcin Kasperski	– Warszawa	38,26
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	37,80
Tomasz Wietecha	– Tarnów	35,41

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1993

Przypominamy treść zadań:

255. Czworokąt wypukły o bokach długości a, b, c, d jest wpisany w koło i opisany na kole. Promień koła opisanego ma długość R. Pole czworokąta równa się S. Dowieść, że
$$\frac{S}{a}+\frac{S}{b}+\frac{S}{c}+\frac{S}{d}\le 2\sqrt{S}+\frac{4R^2}{\sqrt{S}}.$$

256. Dane są liczby całkowite $n\ge k\ge 1$. Ile jest k-elementowych ciągów liczb całkowitych dodatnich $(x_1,\ldots,x_k)$ spełniających równanie $x_1+\ldots+x_k=n$? (Ciągi o tych samych wyrazach, ale występujących w różnej kolejności, uważamy za różne.)

255. Oznaczmy długości przekątnych czworokąta przez e, f tak, by cztery trójkąty wyznaczone przez trójki jego wierzchołków miały (odpowiednio) boki o długościach: (a,b,e), (c,d,e), (a,d,f), (b,c,f). Pola tych trójkątów są kolejno równe $(abe)/(4R)$, $(cde)/(4R)$, $(adf)/(4R)$, $(bcf)/(4R)$; mamy więc równości $4RS = abe+cde$ oraz $4RS = adf+bcf$, które po przemnożeniu stronami dają związek

(1) $$16R^2S^2 = ef\big((a^2+c^2)bd + ac(b^2+d^2)\big).$$

Przyjmijmy oznaczenia:
$$a+c=b+d=p,\qquad ac+bd=E.$$
Pole czworokąta wpisanego w koło i opisanego na kole wyraża się wzorem $S=\sqrt{abcd}$. Zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza ($E=ef$) możemy więc przepisać równość (1) jako

(2) $$\begin{aligned}16R^2S^2 &= E\big((p^2-2ac)bd + ac(p^2-2bd)\big) =\\ &= E\big(Ep^2-4S^2\big).\end{aligned}$$

Lewą stronę danej w zadaniu nierówności przekształcamy do postaci
$$\begin{aligned}\frac{S}{a}+\frac{S}{b}+\frac{S}{c}+\frac{S}{d} &= \frac{1}{S}\left(\frac{S^2}{a}+\frac{S^2}{b}+\frac{S^2}{c}+\frac{S^2}{d}\right) =\\ &= \frac{bcd+cda+dab+abc}{S} =\\ &= \frac{ac(b+d)+(a+c)bd}{S} = \frac{Ep}{S}.\end{aligned}$$
Mamy więc do udowodnienia nierówność $Ep/S \le 2\sqrt{S}+4R^2/\sqrt{S}$, która po pomnożeniu stronami przez $4S^2\sqrt{S}$ i skorzystaniu z (2) przybiera postać

(3) $$4Ep\cdot S\sqrt{S} \le 8S^3 + E^2p^2 - 4ES^2.$$

Ponieważ $S=\sqrt{abcd}\le \frac{1}{2}(ac+bd)=\frac{1}{2}E$ oraz $p^2=(a+c)^2\ge 4ac$, $p^2=(b+d)^2\ge 4bd$, zatem
$$E\ge 2S \qquad \text{oraz} \qquad p\ge\sqrt{2E}.$$
Wynika stąd w szczególności, że
$$Ep-2S\sqrt{S}\ge E\sqrt{2E}-2S\sqrt{S}>0,$$
wobec czego $\left(Ep-2S\sqrt{S}\right)^2 \ge \left(E\sqrt{2E}-2S\sqrt{S}\right)^2$, czyli
$$E^2p^2-4Ep\cdot S\sqrt{S}\ge 2E^3-4ES\sqrt{2ES}.$$
Nierówność (3) będzie więc udowodniona, jeśli wykażemy, że

(4) $$2E^3-4ES\sqrt{2ES}\ge 4ES^2-8S^3.$$

Korzystając ponownie z oszacowania $E\ge 2S$ mamy
$$\begin{aligned}&2E^3-4ES\sqrt{2ES}+8S^3-4ES^2\ge\\ &\ge 2E^2\sqrt{E\cdot 2S}-4ES\sqrt{2ES}+8S^3-4ES^2=\\ &=2\sqrt{2S}(E-2S)\big(E\sqrt{E}-S\sqrt{2S}\big)\ge 0.\end{aligned}$$
To dowodzi nierówności (4), a tym samym i nierówności wyjściowej.

256. Każdemu ciągowi $(x_1,\ldots,x_k)$ spełniającemu warunki zadania przyporządkujmy ciąg $(y_1,\ldots,y_{k-1})$ o wyrazach $y_i=x_1+\ldots+x_i$; oczywiście

(*) $$y_1,\ldots,y_{k-1}\in\{1,2,\ldots,n-1\},\quad y_1<y_2<\ldots<y_{k-1}.$$

Na odwrót, dowolnemu ciągowi $(y_1,\ldots,y_{k-1})$ spełniającemu warunki (*) możemy przyporządkować ciąg $(x_1,\ldots,x_k)$ wzorami
$$x_1=y_1,$$
$$x_i=y_i-y_{i-1}\quad \text{dla } i=2,\ldots,k-1,$$
$$x_k=n-y_{k-1}.$$
Tak określone odwzorowania $((x_i)\mapsto(y_i)$ oraz $(y_i)\mapsto(x_i))$ są wzajemnie odwrotne; ustalają więc bijekcję pomiędzy zbiorem wszystkich ciągów $(x_1,\ldots,x_k)$ spełniających warunki zadania oraz zbiorem wszystkich ciągów $(y_1,\ldots,y_{k-1})$ spełniających warunki (*). Ponieważ ciąg rosnący można identyfikować ze zbiorem jego wyrazów, zatem dopuszczalnych ciągów $(y_1,\ldots,y_{k-1})$ jest tyle, ile $(k-1)$-elementowych podzbiorów ma zbiór $\{1,2,\ldots,n-1\}$ – czyli $\binom{n-1}{k-1}$. Tyle samo jest też i dopuszczalnych ciągów $(x_1,\ldots,x_k)$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 145 (WT=4,00) i 146 (WT=2,60)
z numeru 10/1992

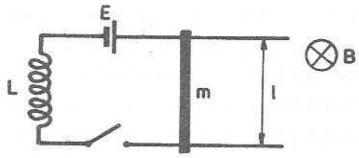
Tomasz Wietecha	– Tarnów	28,92
Przemysław Gworys	– Częstochowa	28,13

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1993

Przypominamy treść zadań:

153. Przyporządkować właściwym otworom obrazy dyfrakcyjne (patrz okładka *Delty* 2/1993) powstałe w wyniku przejścia fali przez te otwory. Zakładamy, że fala pada na otwór prostopadle, a potem jest obserwowana na bardzo odległym ekranie (lub też – w przypadku fali świetlnej – przechodzi przez soczewkę skupiającą, a ekran znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej). Długość fali jest mniejsza od rozmiarów otworu. Objaśnić zasady rozumowania.



154. Narysowany obok obwód znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B, prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Prawą część obwodu tworzy pręt o masie m, który może bez tarcia ślizgać się po poziomych szynach odległych o l. Opisać ruch pręta po zamknięciu klucza. Opór obwodu pominąć.

153. Przyporządkowanie jest następujące:

nr obrazu dyfr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
otwór	)	B	˜	o	x	L	J	N	D	:	T	g	I	H	Z	S	C

Należało zwrócić uwagę m.in. na symetrię rysunków, gdyż symetria otworu musi pociągać za sobą tę samą symetrię obrazu. Związek ten nie jest wzajemnie jednoznaczny, ponieważ każdy obraz dyfrakcyjny ma symetrię środkową (przechodzi w siebie przy przekształceniu $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$). Wynika to ze wzoru przedstawiającego falę za przeszkodą jako sumę (ew. całkę) fal, które uległy rozproszeniu na poszczególnych punktach otworu (zasada Huygensa):

$$\psi = \sum_{\mathbf{r}'} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'),$$

gdzie $\mathbf{k}$ jest wektorem o długości $2\pi/\lambda$ wskazującym punkt $\mathbf{r}$ ekranu. Widzimy, że podstawienie $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ jest równoważne zmianie znaku t, co, oczywiście, nie zmieni amplitudy fali ψ. Symetria środkowa jest więc jedyną symetrią obrazu fali rozproszonej na otworze o kształcie np. litery g, a występowanie symetrii osiowej otworu przy odbiciu względem osi pionowej lub poziomej w połączeniu z symetrią środkową pociąga za sobą symetrię obrazu względem obu osi. Dla otworu o kształcie litery L lub x mamy do czynienia z elementami przybliżonej symetrii względem osi skośnych (obróconych o 45°). Najłatwiej jest rozpoznać literę o ze względu na prawie ścisłą symetrię obrotową.

Obok symetrii istotną wskazówką mogą być podstawowe cechy dyfrakcji i interferencji. Dla otworu o kształcie pionowej kreski („obciętej" litery I) dyfrakcja jest znacznie silniejsza w kierunku poziomym niż pionowym. Obecność dwóch równoległych linii w otworze (np. litery N, H lub Z) wiąże się z układem maksimów i minimów interferencji wzdłuż osi prostopadłej do linii, przy czym im dalej od siebie są te linie, tym gęściej są maksima i minima. Szczególnie łatwe jest rozpoznanie efektów interferencji dla otworu o kształcie dwukropka.

W wielu trudniejszych przypadkach opisane wyżej metody dają odpowiedzi bardzo niejednoznaczne i konieczne jest „kombinowanie" – wyszukiwanie podobieństw otworów i obrazów. Zapewne przyda się i odrobina intuicji. Trudno rozstrzygnąć, czy na elementarnym poziomie możliwe jest jednoznaczne rozróżnienie dyfrakcji na niektórych otworach. Autor spodziewa się interesujących listów od Czytelników!

154. Suma napięć na cewce i ogniwie jest równa SEM indukcji w obwodzie, tzn. wyrażeniu $\Delta\Phi/\Delta t = B\Delta S/\Delta t = Bvl$ (gdzie v – prędkość pręta, ΔS – związana z nią zmiana powierzchni obwodu). Stosując do pręta II zasadę dynamiki otrzymujemy układ równań

$$E - L\frac{\Delta I}{\Delta t} - Blv = 0 \quad (I \text{ – natężenie prądu})$$

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = F = IlB,$$

przy czym dodatnie zwroty wielkości I, v i B są następujące: B za płaszczyznę rysunku, I prawoskrętnie, v w prawo (w razie wątpliwości co do znaków w pierwszym równaniu należy powołać się na regułę Lenza). Rozwiązaniem jest wyrażenie

$$v = \frac{E}{Bl} + a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi, a $\omega = Bl/\sqrt{mL}$. Jeśli w chwili początkowej pręt spoczywał, a prąd był równy zeru, to $b = 0$, $a = -\dfrac{E}{Bl}$, czyli $v = \dfrac{E}{Bl}[1 - \cos(\omega t)]$. Pręt porusza się więc ruchem „skokowym", będącym złożeniem ruchu jednostajnego i drgania harmonicznego.

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł ....

słownie złotych

Dokładny adres wpłacający

na r-k AMOS
Dokładna nazwa 01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

nazwa banku PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku 1586-77578-136

stempel
podpis przyjmującego
Pobrano opłatę
zł ....

Potwierdzenie dla wpłacającego

Zł ....

słownie złotych

Dokładny adres wpłacający

na r-k AMOS
Dokładna nazwa 01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

nazwa banku PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku 1586-77578-136

stempel
podpis przyjmującego
Pobrano opłatę
zł ....