Zauważmy, że na szachownicy są tylko dwie białe bierki mające do dyspozycji przez całą grę około 7 posunięć – na przykład przy podobnych czterech białych bierkach czas byłby już około 2^7 razy dłuższy (dlaczego?), a przy większej liczbie czas byłby długi niewiarygodnie.

Natomiast program HELPBADIX INTELLIGENT rozwiązał powyższe zadanie w 1 godzinę 22 minuty. (Rozwiązał, tzn. znalazł rozwiązanie i sprawdził, że nie ma innych.) (Rozwiązanie zadania 3 – w matach pomocniczych przyjęło się rozpoczynać numerowanie posunięć od ruchu czarnych! – 1.f1W e3 2.Wf4 ef4 3.e3 f5 4.e2 f6 5.e1W f7 6.Wa1 f8W 7.Wa2 Wf3×.)

Przykłady te pokazują z jednej strony nieocenioną pomoc, jaką mogą oddać człowiekowi komputery, a z drugiej wielce dla nas budującą tezę, że jednak „decydujące posunięcie" należy do człowieka i że największe sukcesy ma komputer tam, gdzie z człowiekiem współpracuje lub gdzie „próbuje" go naśladować.

Problem rozkładu natężenia światła w tęczy można także rozwiązać ściśle wykorzystując teorię niemieckiego fizyka Gustawa Mie, który w 1908 r. wykazał, że natężenie fali elektromagnetycznej rozproszonej na kuli może być obliczone z dowolną dokładnością dla dowolnego kąta rozproszenia. Natężenie może być przedstawione jako suma szeregu składników o dość złożonej postaci reprezentujących fale cząstkowe. W przypadku tęczy zachodzi konieczność uwzględnienia kilku tysięcy składników szeregu. Niebanalny problem stanowi przy tym znalezienie jak najefektywniejszego algorytmu obliczeń.

Możliwość uzyskania ścisłych wyników numerycznych nie oznacza końca teoretycznych prac nad tęczą. Ważnym osiągnięciem jest zaadaptowanie do jej opisu aparatu matematycznego stosowanego w teorii rozproszenia cząstek. Zaproponowano także powiązanie wyglądu naturalnej tęczy z rozkładem wielkości kropel deszczu oraz z elipsoidalnym spłaszczeniem największych spośród nich.

Ciekawa tożsamość

Udowodnimy następującą zaskakującą tożsamość

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k - 5^k - 6^k + 7^k + 8^k - \ldots \pm (2^n - 1)^k = 0,$$

gdzie k, n ($k < n$) są dowolnymi liczbami naturalnymi oraz składnik m^k występuje ze znakiem plus, jeśli w zapisie dwójkowym liczby m występuje nieparzysta liczba jedynek i ze znakiem minus w przeciwnym przypadku.

Dowód. Proste wymnożenie prowadzi do tożsamości

$$1 - (1-e^x)(1-e^{2x})(1-e^{4x})\ldots(1-e^{2^{n-1}x}) =$$
$$= e^x + e^{2x} - e^{3x} + e^{4x} - e^{5x} - \ldots - (-1)^n e^{(2^n-1)x}.$$

Nietrudno przekonać się, że znak przy składniku e^{mx} po prawej stronie jest taki sam jak znak przy m^k w wyrażeniu z treści zadania.

Zróżniczkujmy powyższą równość k-krotnie ($k < n$), a następnie podstawmy $x = 0$. Ponieważ k-ta pochodna e^{mx} jest równa $m^k e^{mx}$, więc po podstawieniu $x = 0$ po prawej stronie otrzymamy badane wyrażenie

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k - 5^k - \ldots - (-1)^n (2^n - 1)^k.$$

Teraz zbadamy lewą stronę.

Po lewej stronie różniczkujemy iloczyn złożony z n czynników. Stosując k-krotnie wzór na pochodną iloczynu otrzymamy, że k-ta pochodna lewej strony jest równa sumie wyrażeń postaci

$$-(1-e^x)^{(k_1)}(1-e^{2x})^{(k_2)}\ldots(1-e^{2^{n-1}x})^{(k_n)},$$

gdzie $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, a przez $(1 - e^{2^{m-1}x})^{(k_m)}$ oznaczyliśmy k_m-tą pochodną wyrażenia $1 - e^{2^{n-1}x}$.

Ponieważ $k < n$, więc dla pewnego m zachodzi $k_m = 0$. Oznacza to, że w powyższym iloczynie czynnik $(1 - e^{2^{m-1}x})$ nie jest różniczkowany. Po podstawieniu $x = 0$ czynnik ten będzie równy 0, a stąd i cała lewa strona będzie równa 0. Porównując ją z prawą stroną otrzymujemy tezę.

Paweł STRZELECKI