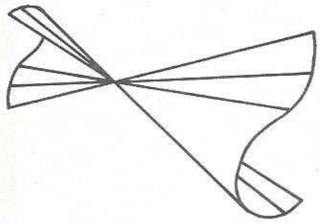
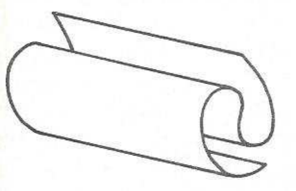
Powierzchnie rozwijalne

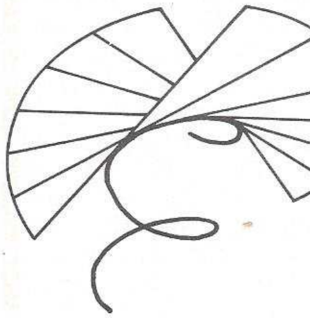
Jerzy KONARSKI



stożek

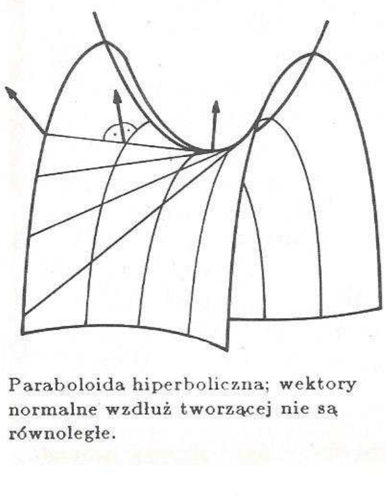


walec



powierzchnia stycznych do linii śrubowej

Wektory normalne wzdłuż tworzącej na walcu są równoległe.



Paraboloida hiperboliczna; wektory normalne wzdłuż tworzącej nie są równoległe.

Każdy wie, jak z papieru zwinąć stożek lub walec. A jakie inne powierzchnie można w ten sposób otrzymać? Uściślijmy jeszcze, że będą nas interesować tylko powierzchnie gładkie, tzn. bez ostrych zagięć, dziobów, punktów, w których przecinają się same ze sobą itp. W szczególności rozpatrując stożki będziemy pomijać ich wierzchołki.

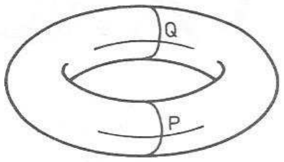
Matematyk stożkiem nazywa powierzchnię utworzoną przez wszystkie proste wychodzące z danego punktu i przecinające daną krzywą. Analogicznie, walec to powierzchnia utworzona przez proste o danym kierunku i przechodzące przez daną krzywą. Jest chyba dość oczywiste, że można z papieru otrzymać dowolny gładki stożek lub walec (pomijając oczywiście kłopoty związane z tym, że kartka papieru zawsze jest ograniczona, a stożek i walec nie), lub najpierw zwijać papier w stożek, a od pewnego miejsca w walec. Ale czy da się uzyskać coś istotnie różnego od walca i stożka, no i od płaszczyzny, oczywiście? Otóż tak. Można otrzymać jeszcze jeden typ powierzchni, mianowicie tzw. powierzchnię stycznych. Jak sama nazwa wskazuje, jest to powierzchnia utworzona ze wszystkich prostych stycznych do danej gładkiej krzywej przestrzennej. Wyjściową krzywą należy jednak z powierzchni usunąć, ponieważ jej punkty tworzą na powierzchni ostrze, a nas interesują powierzchnie gładkie.

Powierzchnie, o których była mowa, nazywamy rozwijalnymi. Łatwo spostrzec, że wszystkie one są utworzone przez rodziny prostych, tzw. tworzących: stożek przez rodzinę prostych wychodzących z wierzchołka, walec przez proste o pewnym kierunku, a powierzchnia stycznych przez rodzinę prostych stycznych do danej krzywej. Matematyk powiedziałby, że są prostokreślne. Rozpatrzmy kilka przykładów powierzchni prostokreślnych. Spośród powierzchni opisanych równaniami kwadratowymi prostokreślne są hiperboloida jednopowłokowa ($x^2 + y^2 - z^2 = 1$) powstała przez obrót hiperboli wokół jednej (której?) z jej osi symetrii oraz paraboloida hiperboliczna ($z = x^2 - y^2$), którą możemy sobie wyobrazić tak: na paraboli „z wąsami do góry" w każdym jej punkcie umieszczamy parabolę „z wąsami w dół". Spróbujcie znaleźć tworzące. Kto ma kłopoty z wyobrażeniem sobie zbiorów opisanych powyższymi równaniami, niech pamięta, że podstawiając zamiast jednej zmiennej liczbę otrzymujemy równanie odpowiedniego przekroju danego zbioru płaszczyzną. Jeszcze innym przykładem jest powierzchnia śrubowa powstająca w wyniku obracania prostej wokół osi prostopadłej do tej prostej, połączonego z przesuwaniem wzdłuż tej osi.

Wiemy już, że wszystkie powierzchnie rozwijalne są prostokreślne. Okazuje się, że powierzchnie z powyższych przykładów nie są rozwijalne – nie uda się ich uzyskać z kartki papieru. Rodzi się pytanie, czy można jakoś (bez papieru) rozpoznać powierzchnie rozwijalne wśród wszystkich powierzchni prostokreślnych. Podamy nawet dwa sposoby. Pierwszy z nich będzie sformułowany w terminach wektorów normalnych. Otóż, wybierzmy sobie jedną z tworzących na powierzchni. W każdym z jej punktów zaczepiamy jednostkowy wektor normalny (tzn. prostopadły do powierzchni). Jeśli wszystkie te wektory są równoległe (różnią się tylko punktem zaczepienia) i jeśli tak jest dla każdej tworzącej z osobna, to powierzchnia jest rozwijalna (i na odwrót). Dla stożków i walców warunek ten jest, oczywiście, spełniony. Aby go sprawdzić dla powierzchni stycznych, trzeba wykonać nietrudne rachunki, które pominiemy. W każdym z trzech podanych wyżej przykładów łatwo jest zauważyć, że wektory normalne, zaczepione wzdłuż dowolnej tworzącej, nie są równoległe. Rozpatrzmy, na przykład, paraboloidę hiperboliczną o równaniu $z = x^2 - y^2$. Powierzchnia ta przypomina przełęcz w górach. Jedną z tworzących jest prosta o równaniach $z = 0$, $x = y$, czyli „ścieżka" prowadząca poziomo przez przełęcz z jednej doliny do drugiej. Jeżeli wzdłuż tej ścieżki wbijemy paliki prostopadle do ziemi, to tylko palik wbity na przełęczy będzie pionowy, pozostałe będą odchylone od pionu o pewien kąt, zależny od odległości danego palika od przełęczy. Przy okazji warto zacytować następujące twierdzenie Michela Chaslesa: Jeśli powierzchnia jest prostokreślna, ale nie rozwijalna, to na każdej tworzącej istnieje tzw. punkt centralny i ma on tę własność, że gdy oddalamy się od niego wzdłuż tej tworzącej, to wektor normalny odchyla się o kąt, którego tangens jest proporcjonalny do odległości od punktu centralnego. Reasumując, na powierzchni rozwijalnej wektory normalne nie zmieniają się wzdłuż tworzących, podczas gdy na powierzchni nierozwijalnej wektory normalne „zachowują się” tak, jak na paraboloidzie hiperbolicznej – na całej drodze wzdłuż tworzącej odchylają się o kąt półpełny (między skrajnymi położeniami granicznymi). Widać, że właśnie ta ostatnia sytuacja ma miejsce w pozostałych dwóch przykładach podanych wyżej.

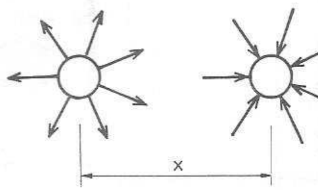
Drugi ze sposobów wyróżnienia powierzchni rozwijalnych wśród prostokreślnych będzie wykorzystywał pojęcie krzywizny Gaussa. Aby ją zdefiniować, wybierzmy pewien punkt P na powierzchni (niekoniecznie nawet prostokreślnej) i rozpatrzmy wszystkie możliwe przekroje tej powierzchni płaszczyznami prostopadłymi (do płaszczyzny stycznej w tym punkcie) i przechodzącymi przez wybrany punkt P. Przekroje te będą krzywymi płaskimi przechodzącymi przez P. Dla każdej z nich wśród okręgów stycznych do niej w P istnieje jeden taki, który ją najlepiej przybliża w okolicy punktu P; nazywamy go okręgiem ściśle stycznym w punkcie P. Odwrotność promienia okręgu ściśle stycznego nazywamy krzywizną danej krzywej w punkcie P. Im mniejszy promień okręgu przybliżającego krzywą, tym większa jej krzywizna – to chyba zgadza się z naszą intuicją. Następnie wybieramy w punkcie P jednostkowy wektor normalny (jeden z dwóch, bo powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ – przynajmniej lokalnie – ma dwie strony). Jeśli nasz okrąg leży po przeciwnej stronie powierzchni niż wybrany wektor, to krzywiznę opatrujemy znakiem minus. Dociekliwy Czytelnik zauważył pewnie, że przekrój może być np. linią prostą lub mieć punkt przegięcia w P. W takich przypadkach określamy krzywiznę jako równą 0. Okazuje się, że albo krzywizny wszystkich przekrojów normalnych w P są równe, albo istnieją dwa przekroje mające największą i najmniejszą krzywiznę i że są one do siebie prostopadłe. Kierunki styczne do powierzchni, wyznaczające te przekroje, nazywają się kierunkami głównymi w punkcie P, a odpowiednie krzywizny – krzywiznami głównymi (w przypadku, gdy wszystkie przekroje mają równe krzywizny, wszystkie kierunki są główne). Teraz możemy już podać definicję krzywizny Gaussa naszej powierzchni w punkcie P. Krzywizna ta jest iloczynem krzywizn głównych w tym punkcie. Zauważmy, że jasną interpretację ma jej znak. Mianowicie, dodatnią krzywiznę Gaussa mają powierzchnie wypukłe w jedną stronę (podobne do pagórka lub dołka), ujemną – powierzchnie podobne do siodła (lub przełęczy), wreszcie zerową – powierzchnie mające wszystkie przekroje o zerowej krzywiźnie lub jeden o krzywiźnie zerowej, a pozostałe o krzywiźnie tego samego znaku. Przypomnijmy sobie nasze trzy przykłady. Rzut oka na szkic wystarczy, żeby stwierdzić, iż wszystkie wyglądają jak siodła (lokalnie) i wobec tego mają ujemną krzywiznę Gaussa w każdym punkcie. Można udowodnić, że wszystkie powierzchnie prostokreślne mają ujemną lub zerową krzywiznę Gaussa w każdym swoim punkcie. A co z powierzchniami rozwijalnymi? Okazuje się, że mają one wszystkie zerową krzywiznę. Dla płaszczyzny, stożka i walca Czytelnik chyba bez trudu sprawdzi to sam, ale dla powierzchni stycznych trzeba by trochę porachować. My jednak postąpimy inaczej. Wykorzystamy pewne twierdzenie udowodnione przez Gaussa. Mówi ono, że krzywizna Gaussa dowolnej powierzchni nie zmienia się przy zginaniu (bez rozciągań). Wynika z tego, że skoro krzywizna Gaussa płaszczyzny jest zerowa, to zerowa jest też krzywizna każdej powierzchni rozwijalnej. Gauss był tak dumny ze wspomnianego twierdzenia, że nazwał je *theorema egregium*, czyli twierdzenie chwalebne. Zwróćmy uwagę, że wcale nie jest ono oczywiste – krzywizna Gaussa jest określona za pomocą przekrojów normalnych, które zmieniają się przy zginaniach! Wracając do powierzchni rozwijalnych, można wykazać, że są one jedynymi powierzchniami o zerowej krzywiźnie. Otrzymaliśmy więc drugi warunek charakteryzujący powierzchnie rozwijalne wśród prostokreślnych: zerowanie się krzywizny Gaussa.

Na zakończenie warto może wspomnieć o pewnej własności sumy krzywizn głównych, czyli o tzw. krzywiźnie średniej. Mianowicie, zerową krzywiznę średnią mają tzw. powierzchnie minimalne, których modelami w przyrodzie są bańki mydlane rozpięte na (niekoniecznie płaskim) konturze z drutu.



Torus – powierzchnia przypominająca dętkę. Zaznaczone przekroje mają największą i najmniejszą krzywiznę w punktach P i Q. Krzywizna Gaussa w punkcie P jest dodatnia, a w punkcie Q – ujemna.

Rozwiązanie zadania F 857.
Niech przez elektrody płynie prąd I, a napięcie między nimi wynosi U. Wtedy opór mierzony na elektrodach jest równy $R = \frac{U}{I}$.



Gęstość prądu j w dowolnym punkcie folii znajdujemy traktując przepływ prądu jako superpozycję prądu rozpływającego się symetrycznie z punktu A do nieskończoności i wpływającego symetrycznie z nieskończoności do punktu B (rys.)

$$j = \frac{I}{2\pi r_A d} + \frac{I}{2\pi r_B d},$$

gdzie r_A i r_B są odległościami dowolnego punktu folii od A i od B. Z prawa Ohma znajdujemy natężenie pola elektrycznego $E = \sigma j$. Całkując wzdłuż AB znajdujemy napięcie U

$$U = \int E \, dl = \int_{r_0}^{x - r_0} \left(\frac{I\varrho}{2\pi l d} + \frac{I\varrho}{2\pi (x - l) d} \right) dl = \frac{\varrho I}{\pi d} \ln \frac{x - r_0}{r_0}.$$

Stąd $R = \frac{\varrho}{\pi d} \ln \frac{x - r_0}{r_0}$. Jeżeli zastosowalibyśmy elektrody punktowe, otrzymalibyśmy nieskończony opór folii, co uniemożliwiłoby wyznaczenie d. Przekształcając wzór otrzymujemy $d = \frac{\varrho}{\pi R} \ln \frac{x - r_0}{r_0}$.