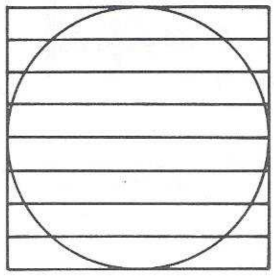
Pokryć paskami

W *Delcie* 8/1992 został ogłoszony otwarty konkurs na rozwiązanie następującego zadania:

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Za pomocą n pasków o wymiarach $\frac{1}{n} \times 1$ możemy bez trudu pokryć koło o średnicy 1 (rys. 1). Wydaje się, że nie można pokryć tego koła za pomocą mniejszej liczby pasków o podanych wymiarach. Czy można to w prosty sposób udowodnić?

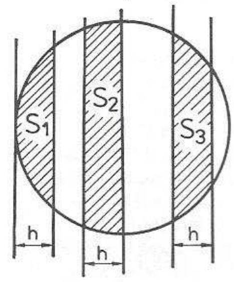


Rys. 1

Poprawnych rozwiązań, jak dotąd (tekst ten był pisany w styczniu 1993) nie otrzymaliśmy. Powyższe zadanie zostało sformułowane i rozwiązane jeszcze przed wojną przez polskiego matematyka Zenona Waraszkiewicza. Oryginalne rozwiązanie było jednak trudne. Poniżej przytaczamy niezwykle eleganckie rozwiązanie podane przez Samuela Eilenberga (Jeden z najbardziej znanych na świecie matematyków. W latach 30. wyemigrował z Polski do USA i tam obecnie pracuje.).

Zacznijmy od sformułowania twierdzenia Archimedesa.

Przetnijmy sferę o średnicy 1 dwiema równoległymi płaszczyznami oddalonymi o h. Wówczas powierzchnia wyciętego pierścienia zależy tylko od h, a nie zależy od miejsca, w którym wycięliśmy pierścień (rys. 2).



Rys. 2.

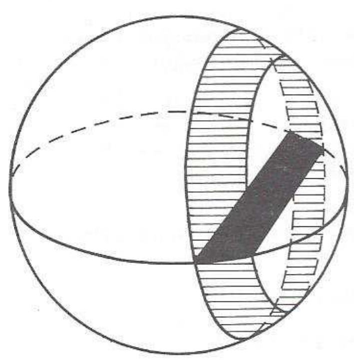
$S_1 = S_2 = S_3$.

To jest widok z boku – równolegle do płaszczyzn. S_1 jest przypadkiem granicznym – pierścień zdegenerował się do czapeczki.

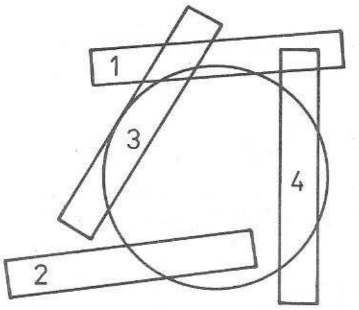
Dowód tego twierdzenia można znaleźć np. w *Delcie* 9/1991 (str. 9). Archimedes korzystał z tego twierdzenia przy wyprowadzaniu wzoru na powierzchnię sfery.

Ale co ono ma wspólnego z naszym zadaniem?

Koło o średnicy 1 jest kołem wielkim pewnej sfery o średnicy 1. Połóżmy na kole jeden z pasków o wymiarach $\frac{1}{n} \times 1$ (rys. 3). Prowadząc przez dłuższe boki tego paska płaszczyzny prostopadłe do koła wytniemy ze sfery pierścień. Powierzchnia tego pierścienia nie zależy od położenia paska. Ponieważ koło możemy przykryć za pomocą n pasków (rys. 1), więc prowadzi to do pokrycia sfery za pomocą n pierścieni o równych powierzchniach (dwa z nich są zdegenerowane, tzn. są czapeczkami). Stąd powierzchnia takiego pierścienia (czapeczki) jest równa $\frac{s}{n}$, gdzie s oznacza powierzchnię sfery. Przypuśćmy teraz, że potrafimy pokryć koło za pomocą k pasków. Mamy wykazać, że $k \geq n$. Otóż, pokrycie koła k paskami prowadzi do pokrycia sfery za pomocą k pierścieni i czapeczek. Ponieważ powierzchnia pojedynczego pierścienia (czapeczki) jest równa $\frac{s}{n}$, a razem pokrywają one całą sferę, więc $\frac{s}{n} \cdot k \geq s$, skąd $k \geq n$, cbdo.



Rys. 3



Rys. 4. Odrzucamy te paski, które przykrywają koło w sposób „nieoszczędny" (możemy to, oczywiście, zrobić). Na rysunku paski 1 i 2 są złe, a paski 3 i 4 – dobre

Piotr HAJŁASZ

Rozwiązanie zadania M 669. Utwórzmy ciąg $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $n_4 = 6, \ldots$, zawierający w porządku wzrastania wszystkie liczby naturalne nie będące kwadratami liczb naturalnych. Niech

$$n_{k,m} = (n_k)^{2^m} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots \quad \text{oraz } m = 0, 1 \ldots$$

Oczywiście, dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ można jednoznacznie dobrać k i m tak, aby $n = n_{k,m}$. Naszą funkcję definiujemy tak:

$$f(1) = 1,$$

$$f(n_{k,m}) = \begin{cases} n_{k+1,m}, & \text{gdy } k \text{ jest nieparzyste,} \\ n_{k-1,m+1}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Łatwo teraz zauważyć, że warunki zadania są spełnione.