epsilon
5/93
(27)

Jeszcze o ciągłych bijekcjach

Przypomnijmy: homeomorfizm to taka ciągła bijekcja, że funkcja do niej odwrotna też jest ciągła. O niehomeomorficznych zbiorach, które można przekształcać wzajemnie na siebie za pomocą bijekcji ciągłych, pisaliśmy w *EPSILONACH* nr 8 i 9. Ale można zadać jeszcze inne pytanie związane z tymi zagadnieniami: czy istnieje zbiór X i ciągła bijekcja $f : X \to X$, która nie jest homeomorfizmem?

Odpowiedni zbiór i funkcję można znaleźć, bazując na konstrukcji „par niehomeomorficznych". Zbiór określamy następująco:

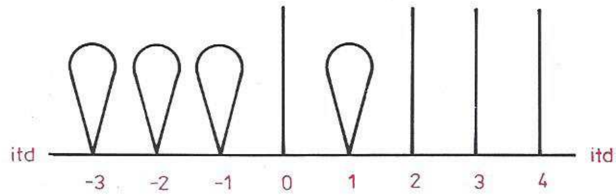
$$X = \ldots (-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2) \cup \{3\} \cup (4,5) \cup \{6\} \cup \ldots$$

Funkcję zaś definiujemy tak: punkt $\{3\}$ i przedział $(4,5)$ przesuwamy i „doklejamy" do przedziału $(1,2)$; za pomocą „ściśnięcia" otrzymamy znów przedział $(1,2)$. Wszystkie liczby zbioru X większe niż 5 przesuwamy o 3 w lewo. Funkcja ta (jak ją zapisać wzorem?) będzie bijekcją ciągłą X na X, ale nie homeomorfizmem (przy funkcji odwrotnej przedział $(1,2)$ byłby rozerwany).

Nasuwa się kolejne pytanie. Skorzystaliśmy w sposób istotny z tego, że nasz zbiór miał nieskończenie wiele „kawałków". Czy gdyby zbiór był „jednokawałkowy" (matematycy nazywają takie zbiory spójnymi), odpowiedź byłaby inna?

Okazuje się, że i tu można podać kontrprzykład.

Do prostej na płaszczyźnie dodajmy „pętelki" i odcinki (bez górnego końca), zaczepiając je w punktach o współrzędnych całkowitych (por. rys.).



Funkcję określamy „zawijając" odcinki zaczepione w 0 i 3 w pętelki i przesuwając całą figurę o 2 w lewo.

Tu zbiór był już spójny, ale nie był domknięty (ze względu na końce pionowych odcinków) ani ograniczony. Co by się zatem stało, gdybyśmy narzucili i te dwa warunki? Jeżeli myślimy o podzbiorach płaszczyzny, to dodanie jednego z nich nie przeszkadza w istnieniu kontrprzykładu – możemy zamienić odcinki w półproste lub „ścieśnić i zagęścić" figurę tak, by ją zawrzeć w pewnym kole. Gdy jednak dodamy oba warunki jednocześnie, sytuacja jest inna!

Bardzo ważnym pojęciem matematyki jest zwartość. *Jakąż cudowną własnością jest zwartość* – tak zaczyna Klaus Jänich rozdział I.8 swego podręcznika *Topologia* (polski przekład: PWN 1991). W przypadkach podzbiorów $\mathbf{R}^n$ (a więc i prostej, płaszczyzny, przestrzeni) zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. Klasyczne twierdzenie (i wcale nie trudne w dowodzie) mówi natomiast, że bijekcja ciągła określona na zbiorze zwartym jest homeomorfizmem. Dodajmy, że spójność nie odgrywa tu roli.

Zauważmy przy okazji, jak może przydać się znajomość rozmaitych twierdzeń. Znając wspomniany wynik od razu wiadomo, gdzie ewentualnego kontrprzykładu na pewno szukać nie należy...

Krzysztof CIESIELSKI

* NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA * NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA * NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA *

Podczas egzaminu student przedstawia dowód twierdzenia. W pewnym momencie „zacina się" i mimo kilku prób nie może sobie przypomnieć, jak dowód poprowadzić dalej.

W tej sytuacji profesor decyduje się mu pomóc, jednakże po chwili zadumy stwierdza:
– Wie pan co? Dobrze, że to pan ten egzamin zdaje, a nie ja.

Podczas egzaminu student przedstawia dowód twierdzenia. W pewnym momencie „zacina się" i mimo kilku prób nie może sobie przypomnieć, jak dowód poprowadzić dalej.

W tej sytuacji profesor (który ten fragment materiału wykładał w oparciu o swój własny skrypt) decyduje się mu pomóc. Okazuje się jednak, że i on nie pamięta dalszego ciągu dowodu. Wówczas, po chwili zadumy, stwierdza:
– Proszę pana, po co my się męczymy? Przecież tu, na biurku leży skrypt, sprawdźmy, jak ten dowód idzie dalej.

(Obie historie są autentyczne.)

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.