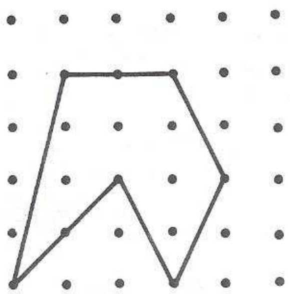
Twierdzenie Picka



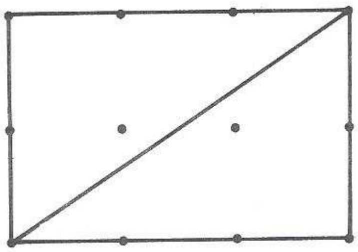
Rys. 1. Pole $= 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 9$.

Punktami kratowymi na płaszczyźnie nazywamy punkty o obu współrzędnych całkowitych. Twierdzenie Picka daje prostą formułę obliczania pól wielokątów, których wierzchołki położone są w punktach kratowych (dalej wielokąty takie nazywamy kratowymi). Pole to jest równe

$$w + \frac{1}{2}b - 1,$$

gdzie w oznacza liczbę punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, a b – liczbę punktów kratowych leżących na jego brzegu. Uzasadnienie tej formuły podzielimy na kilka części.

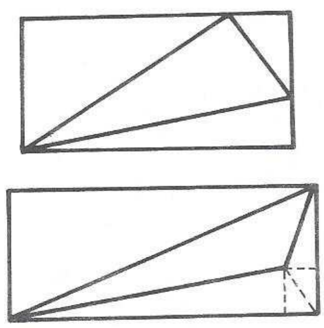
1. Załóżmy, że wielokąt kratowy został podzielony odcinkiem o końcach w punktach kratowych, leżącym wewnątrz wielokąta, na dwa mniejsze wielokąty. Niech liczby punktów kratowych, leżących wewnątrz dużego wielokąta i wielokątów mniejszych, będą odpowiednio równe w, w_1, w_2, punktów zaś brzegowych b, b_1, b_2. Załóżmy, że na odcinku dzielącym znajduje się poza końcami x punktów kratowych. Wówczas $w + \frac{1}{2}b - 1 = (w_1 + w_2 + x) + \left(\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - x - 1\right) - 1 = w_1 + \frac{1}{2}b_1 - 1 + w_2 + \frac{1}{2}b_2 - 1$. Z zależności tej wynika, że jeśli formuła jest prawdziwa dla dwóch z tych trzech wielokątów (dwóch mniejszych lub większego i jednego z mniejszych), to i dla trzeciego.



Rys. 2.

2. Prostokąt kratowy o bokach długości m, n równoległych do osi zawiera wewnątrz $w = (m-1)(n-1)$ punktów kratowych i na brzegu $b = 2m + 2n$ takich punktów. Zatem $w + \frac{1}{2}b - 1 = mn$, a więc formuła jest prawdziwa dla takich prostokątów.

3. Trójkąt kratowy prostokątny o przyprostokątnych równoległych do osi jest połową pewnego prostokąta kratowego o bokach równoległych do osi (rys. 2). Formuła dla takich trójkątów wynika więc z 1 i 2.

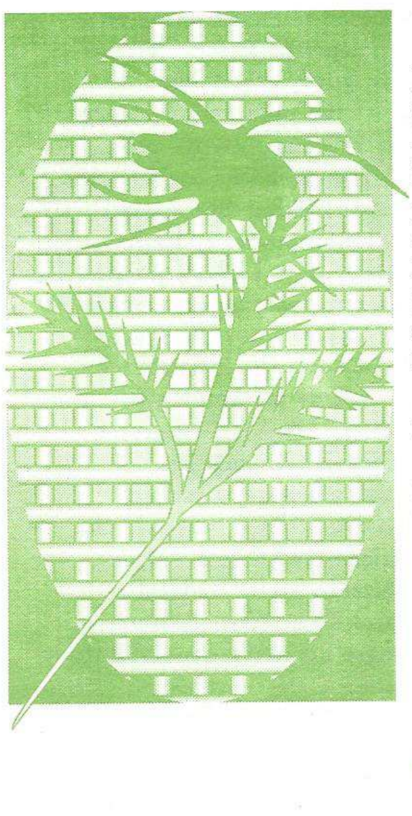


Rys. 3.

4. Dowolny trójkąt kratowy można uzyskać usuwając z pewnego prostokąta kratowego o bokach równoległych do osi kilka trójkątów kratowych prostokątnych o przyprostokątnych równoległych do osi. Jak to można zrobić, pokazujemy na rysunku 3. Formułę dla takich trójkątów otrzymuje się więc z 1–3.

5. Dowolny wielokąt kratowy można podzielić na trójkąty kratowe. Następnie wystarczy zastosować **1** i **4**.

E. P.



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 664. Wewnątrz kwadratu o boku 1 danych jest dziewięć różnych punktów. Udowodnić, że wśród wszystkich trójkątów o wierzchołkach w tych punktach istnieje przynajmniej jeden mający pole mniejsze od 1/8.
Rozwiązanie na str. 5

M 665. Dla danego $n \in \mathbf{N}$ znaleźć największe $k \in \mathbf{N}$ o własności: w zbiorze n-elementowym można wybrać k podzbiorów o parami niepustych przecięciach.
Rozwiązanie na str. 5

M 666. Dane są dwa nieskończone ciągi liczb naturalnych (a_n) oraz (b_n). Wykazać, że istnieją takie $i, j \in \mathbf{N}$, $i < j$, dla których jednocześnie $a_i \le a_j$ oraz $b_i \le b_j$.
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Jarosław KULPA

F 355. Oszacować, jakie ciśnienie panuje na szczycie Mount Everest ($H = 8848$ m n.p.m). Przyjąć, że ciśnienie na poziomie morza jest równe ciśnieniu normalnemu $p_0 = 101325$ Pa, masa molowa powietrza wynosi $\mu = 0,029$ kg/mol, temperatura na poziomie morza wynosi 15°C i maleje wraz z wysokością. Gradient temperatury wynosi $a = 6,5$°C/km.
Rozwiązanie na str. 12

F 356. Meteoryt o gęstości trzykrotnie większej od gęstości wody wpadł do oceanu. Obliczyć, ile razy prędkość meteorytu w powietrzu była większa od jego prędkości w wodzie po wyhamowaniu. Gęstość powietrza wynosi $\varrho_p = 1,3$ kg/m^3, gęstość wody $\varrho_w = 1000$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 12