Klub 44

$$\otimes\sqrt{\sum\!\int\!!}=44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1993

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 259, 260

Redaguje Marcin E. KUCZMA

259. Dana jest liczba rzeczywista a. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (x_1, x_2, x_3, x_4) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x_1+x_2+x_3)\cdot x_4 = a \\ (x_2+x_3+x_4)\cdot x_1 = a \\ (x_3+x_4+x_1)\cdot x_2 = a \\ (x_4+x_1+x_2)\cdot x_3 = a. \end{cases}$$

260. Na okręgu danych jest pięć różnych punktów A, B, C, D, U. Rzuty prostokątne punktu U na proste AB, AC, BC leżą na jednej prostej (znany fakt); jest to tzw. *prosta Simsona* punktu U względem trójkąta ABC. Analogicznie określamy proste Simsona punktu U względem trójkątów ABD, ACD, BCD. Udowodnić, że rzuty prostokątne punktu U na te cztery proste Simsona są współliniowe.

Zadanie **260** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1992

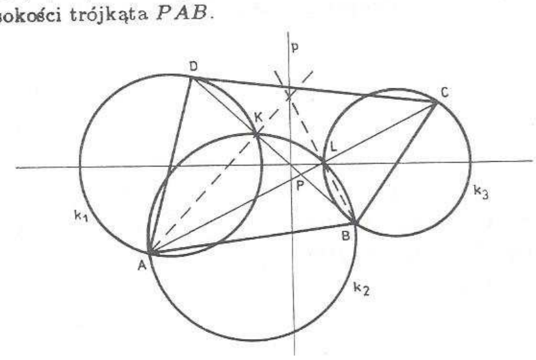
Przypominamy treść zadań:

251. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ nie są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że prosta przechodząca przez ortocentra trójkątów PAB i PCD jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki boków BC i DA.

252. Ciąg wielomianów $W_0(x)$, $W_1(x)$, ... jest określony przez warunki: $W_0(x)=1$, $W_{n+1}(x) = W_n{}'(x) - 2xW_n(x)$. Dowieść, że $W_{2k+1}(0)=0$, $W_{2k}(0) = (-1)^k(2k)!/k!$ dla $k=0,1,2,\ldots$.

251. Skoro przekątne nie są prostopadłe, rozważane ortocentra nie pokrywają się.

Oznaczmy przez k_1, k_2, k_3, k_4 okręgi, których średnicami są odpowiednio odcinki DA, AB, BC, CD, i niech $k_1 \cap k_2 = \{A, K\}$, $k_2 \cap k_3 = \{B, L\}$ (rys.). Kąty AKB, AKD, BLA, BLC są proste, zatem proste AK i BL zawierają wysokości trójkąta PAB.



Niech p będzie prostą potęgową pary okręgów k_1, k_3. Liniami potęgowymi par k_1, k_2 oraz k_2, k_3 są odpowiednio proste AK oraz BL. Te trzy proste potęgowe są współpękowe. Zatem punkt przecięcia prostych AK i BL, czyli ortocentrum trójkąta PAB, leży na prostej p. Analogicznie (rozważając trójkę okręgów k_1, k_3, k_4) wykazujemy, że ortocentrum trójkąta PCD także leży na prostej p. Pozostaje zauważyć, że prosta p jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki okręgów k_1 i k_3, czyli środki odcinków DA i BC.

252. Weźmy pod uwagę funkcję $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Pochodna dowolnego rzędu n funkcji f ma postać $f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem. Dla dowolnie ustalonego n różniczkujemy tę równość i znajdujemy

$$f^{(n+1)}(x) = P_n{}'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xP_n(x)\mathrm{e}^{-x^2} = \big(P_n{}'(x) - 2xP_n(x)\big)\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Jednocześnie $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Wobec tego $P_{n+1}(x) = P_n{}'(x) - 2xP_n(x)$. Widzimy, że ciąg wielomianów $\big(P_n(x)\big)$ spełnia tę samą zależność rekurencyjną, co dany w zadaniu ciąg $\big(W_n(x)\big)$; a ponieważ $f^{(0)}(x) = f(x) = 1\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$, zatem $P_0(x) = 1 = W_0(x)$. Stąd $P_n(x) = W_n(x)$ dla wszystkich n, czyli mamy równość

$$f^{(n)}(x) = W_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Wykorzystamy teraz rozwinięcie potęgowe

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\text{gdzie} \quad a_n = \begin{cases} (-1)^k/k! & \text{dla } n = 2k, \\ 0 & \text{dla } n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Wiadomo, że współczynniki szeregu potęgowego przedstawiającego funkcję f dane są wzorem

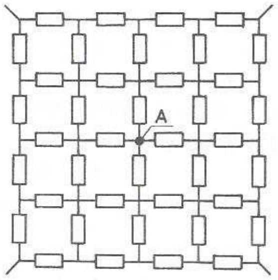
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{W_n(0)}{n!} = \begin{cases} W_{2k}(0)/(2k)! & \text{dla } n=2k, \\ W_{2k+1}(0)/(2k+1)! & \text{dla } n=2k+1. \end{cases}$$

Z przyrównania otrzymanych wyrażeń wynikają dowodzone równości.

Zadania z fizyki nr 157, 158

Redaguje Jerzy B. BROJAN

157. W układzie 40 jednakowych oporników po 1 Ω (rys.) cztery rogi są zwarte. Ile wynosi opór zastępczy między tymi czterema rogami a środkowym punktem A?



158. Do dwóch punktów A i B odległych o d przymocowane są końce wiotkiego, nierozciągliwego przewodu o długości $l > d$, przez który płynie prąd o natężeniu I. Zbadać kształt przewodu i obliczyć siłę napinającą, jeśli przewód znajduje się w zewnętrznym jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$ skierowanym równolegle do odcinka AB. Założyć, że własne pole magnetyczne przewodu jest pomijalnie małe w porównaniu z polem zewnętrznym.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 141 (WT=3,85) i 142 (WT=1,60) z numeru 8/1992

Tomasz Wietecha	– Tarnów	27,72
Przemysław Gworys	– Częstochowa	25,69
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	21,02

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1992

Przypominamy treść zadań:

149. W celu usprawnienia komunikacji między Ziemią i Księżycem rozpięto od jednego do drugiego ciała niebieskiego drabinkę sznurową. Masa jednego kilometra drabinki jest równa 100 kg. Do którego ciała – Księżyca czy Ziemi – drabinka musi być przymocowana, aby nie spadła na drugie? Ile wynosi siła napięcia w miejscu przymocowania, jeśli o drugie ciało drabinka opiera się luźno? Ile wynosi maksymalna siła napięcia drabinki i w którym miejscu to maksimum występuje?

150. Dopuszczalna wielkość rozmycia obrazu na kliszy fotograficznej wynosi $d = 0,1$ mm. Jaki jest zakres „głębi ostrości", jeśli ogniskowa obiektywu wynosi $f = 50$ mm, średnica otworu obiektywu $h = 30$ mm, a obiektyw nastawiono na odległość $l = 5$ m?

149. Wprowadźmy oznaczenia: $R = 384400$ km – odległość środków Ziemi i Księżyca, $R_Z = 6370$ km – promień Ziemi, $R_K = 1738$ km – promień Księżyca, $\mu_Z = \mathrm{G}M_Z = \mathrm{g}R_Z^2 = 3,98\cdot 10^{14}\ \mathrm{Nm^2kg^{-1}}$ (gdzie G – stała grawitacji, M_Z – masa Ziemi, g – przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi), $n = \dfrac{M_Z}{M_K} = 81$ – stosunek masy Ziemi do masy Księżyca, $R_S = R\dfrac{M_K}{M_K+M_Z} = R\dfrac{1}{n+1}$ – odległość środka masy układu Ziemia – Księżyc od środka Ziemi, ω – prędkość kątowa układu (wynikająca z ruchu obiegowego), $\rho = 0,1$ kg/m – masa drabinki na jednostkę długości.

W obracającym się układzie odniesienia przyspieszenie grawitacyjne γ na odcinku Ziemia – Księżyc w odległości r od środka Ziemi jest złożeniem grawitacji ziemskiej $\dfrac{\mu_Z}{r^2}$, księżycowej $\dfrac{\mu_Z/n}{(R-r)^2}$ oraz przyspieszenia odśrodkowego $\omega^2(r-R_S)$. Odejmując od pierwszego wyrażenia dwa pozostałe i podstawiając

$$\omega^2 = \frac{\mathrm{G}(M_Z+M_K)}{R^3} = \frac{\mu_Z}{R^3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{(III prawo Keplera)}$$

mamy

$$\gamma = \frac{\mu_Z}{r^2} - \frac{1}{n}\frac{\mu_Z}{(R-r)^2} - \frac{\mu_Z}{R^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(r - R\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \mu_Z\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{n(R-r)^2} - \frac{n+1}{n}\frac{r}{R^3} + \frac{1}{nR^2}\right)$$

Podstawiwszy wartość n można numerycznie wyznaczyć „punkt równowagi", czyli punkt, w którym $\gamma = 0$. Okazuje się, że leży on w odległości $R_r = 0,8489\cdot R$ od środka Ziemi. W tym punkcie napięcie drabinki jest maksymalne, a całkując γ od R_Z do R_r oraz od R_r do $R-R_K$ i mnożąc przez ρ obliczamy „ciężary" obu części drabinki – P_1 i P_2.

$$P_1 = \rho\int_{R_Z}^{R_r}\gamma(r)\,\mathrm{d}r = \rho\mu_Z\left[\left(\frac{1}{R_Z}-\frac{1}{R_r}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{R-R_r} - \frac{1}{R-R_Z}\right) - \frac{n+1}{n}\frac{1}{2R^3}\left(R_r^2-R_Z^2\right) + \frac{1}{nR^2}(R_r-R_Z)\right] =$$

$$= \rho\mu_Z\cdot 0,0001528\ \mathrm{km^{-1}} = 6,08\cdot 10^6\ \mathrm{N}.$$

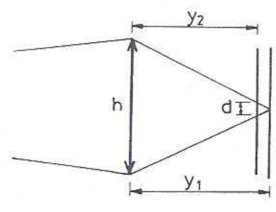
$$P_2 = \rho\int_{R_r}^{R-R_K}|\gamma(r)|\,\mathrm{d}r = \rho\mu_Z\left[-\left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{R-R_K}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{R_K} - \frac{1}{R-R_r}\right) + \frac{n+1}{n}\frac{1}{2R^3}\left((R-R_K)^2 - R_r^2\right) - \frac{1}{nR^2}(R-R_K-R_r)\right] =$$

$$= \rho\mu_Z\cdot 0,00000679\ \mathrm{km^{-1}} = 2,70\cdot 10^5\ \mathrm{N}.$$

Jak widać, P_1 jest kilkadziesiąt razy większe od P_2. Wynika stąd, że należy przymocować drabinkę do Księżyca. Maksymalna siła napięcia jest równa P_1, a siła w punkcie zawieszenia wynosi $P_1 - P_2 = 5,81\cdot 10^6$ N.

Dobre wyniki przybliżone można otrzymać pomijając R_S lub całkowicie pomijając siłę odśrodkową.

150. Przyjmijmy dla uproszczenia, że obiektyw jest pojedynczą soczewką (nie jest to istotne ograniczenie). Jeśli obraz powstaje w odległości y_1 od soczewki, a klisza znajduje się w odległości y_2, to – jak widać z rysunku – rozmycie d można znaleźć z proporcji



$$\frac{h}{d} = \frac{y_1}{y_1-y_2} \approx \frac{y}{\Delta y}.$$

Odległość l do przedmiotu jest powiązana z y równaniem $\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{f}$. Stąd

$$\Delta\left(\frac{1}{l}\right) = \Delta\left(\frac{1}{y}\right) \approx \frac{\Delta y}{y^2},$$

gdzie pominięto znaki i uwzględniono, że Δy jest małe w porównaniu z y. Wyrażenie $\Delta\left(\frac{1}{l}\right)$ oznacza tu różnicę między odwrotnością nastawionej odległości do przedmiotu a odwrotnością odległości rzeczywistej, na granicy zakresu głębi ostrości. Ponieważ y jest dość bliskie ogniskowej f, więc otrzymujemy

$$\Delta\left(\frac{1}{l}\right) \approx \frac{d}{yh} \approx \frac{d}{fh} = 0,067\ \mathrm{m^{-1}}.$$

Zatem obszar głębi ostrości obejmuje $\dfrac{1}{l} \in [0,133; 0,267]\ \mathrm{m^{-1}}$, czyli $l \in [3,75; 7,5]$ m.