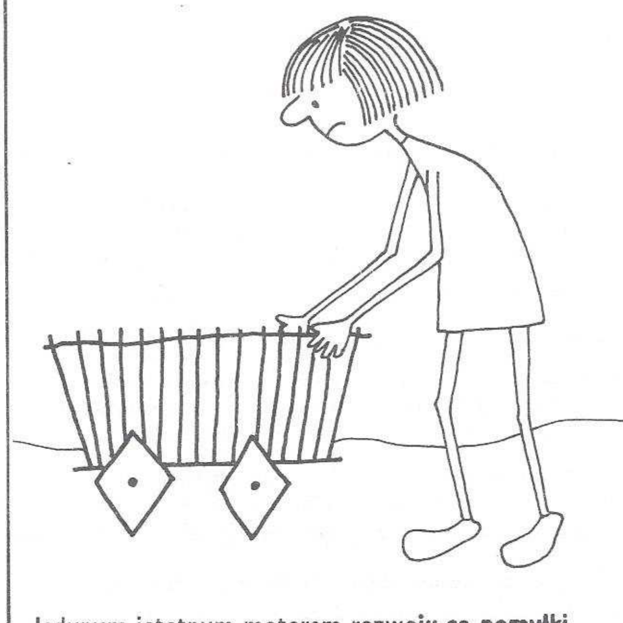
epsilon

4/93
(26)

W kolejnym numerze EPSILONA przybliżamy instytucję absolutnie wyjątkową w spektrum matematycznym – Instytut Matematyki Najwspółcześniejszej. Obok informacji o Instytucie autorstwa pierwszego Przewodniczącego Supremum IMN, Józefa Piórka (następnymi, wybieranymi na kolejnych semirocznicach powstania IMN byli Adam Grobler i Jacek Stasica) zamieszczamy skromną część dorobku naukowego Instytutu. W przedstawionych fragmentach skryptu „Rozmaitości absurdalne", zawierającego największe osiągnięcia IMN z półtorarocznego okresu jego aktywnej działalności, dokonaliśmy pewnych „kosmetycznych" korekt – koniecznych ze względu na wyrwanie z kontekstu dwóch stron skryptu stanowiącego, jako dzieło matematyczne, logiczną całość. Rysunek pochodzi z bogatego zbioru ilustrowanych cytatów IMN, wykonywanych przez Zofię Denkowską.

Instytut Matematyki Najwspółcześniejszej został poczęty z ojca Półmetka (naszego roku studiów) i z matki Nudy, jaka panowała na pewnych ćwiczeniach w jakiś czas po Półmetku. Na nazwę przedmiotu spuśćmy litościwie zasłonę milczenia. Narodziny **IMN** nastąpiły 24 kwietnia 1970 roku, czyli kilka epok temu (przypomnijmy młodszym: był to okres *schyłkowego Gomułki*). Wszyscy, poza jednym, członkowie założyciele byli wówczas *semimagistrami*, który to tytuł uzyskali zaliczając z pozytywnym wynikiem rzeczony Półmetek. Nie będziemy wnikali w szczegóły Statutu regulującego działalność IMN. Powiedzmy tu jedynie, że statut nasz nigdy nie został zgłoszony do akceptacji (lub odrzucenia) żadnym ważnym *Władzom*, chociaż najważniejsze władze, Dyrekcja Instytutu Matematyki UJ i jego pracownicy wiedzieli o istnieniu IMN i byli w zasadzie na bieżąco informowani o jego działalności. Dzięki temu, że IMN nie był nigdzie oficjalnie zarejestrowany, nie został też ani rozwiązany, ani zawieszony w okresie stanu wojennego, chociaż sympatie znakomitej większości członków Instytutu były jawnie i jednoznacznie po stronie antyrządowej. (Uwaga: piszę *znakomitej większości*, a nie *wszystkich*, ponieważ wrodzona ścisłość matematyczna nie pozwala mi użyć tak kategorycznego stwierdzenia; czuję się jednak w obowiązku nadmienić, że nie jest mi znany przypadek poparcia działalności WRON przez któregokolwiek z członków IMN.) Co także bardzo ważne, ostatnie wybrane władze samego Instytutu formalnie sprawują urząd do dziś, jako że nie został ustalony termin upływu kadencji. Tak więc, od chwili swoich narodzin IMN istnieje nieprzerwanie, ma ważnie wybrane władze, aczkolwiek od lat wielu żyje życiem utajonym (nawet dla swoich członków).

Najważniejszymi przejawami działalności Instytutu w jego złotym okresie (1970–1972) były:
(i) gromadzenie odkryć matematyki najwspółcześniejszej (jak np. *zbioru absurdalnego*, tj. takiego, który nie zawiera *żadnego* zbioru; to nie może być zbiór pusty, bo ten zawiera siebie);
(ii) gromadzenie cytatów z wypowiedzi naszych wykładowców i asystentów (np., *Wrócił w tym sensie, że nie wyszedł* – o zbiorze powracającym, *Istnieją ciała nieprzesuwalne* – to, chyba, o teorii miary?, *Interesuje mnie wszystko, co jest wypukłe(?), zbiór nadziany topologią* itd.);



Jedynym istotnym motorem rozwoju **są pomyłki.**

(iii) organizowanie semirocznic Półmetka **z udziałem** naszych nauczycieli, którzy byli poddawani **egzaminom** z *matematyki najwspółcześniejszej*, ale także odznaczani, np. *Złotymi*, *Srebrnymi* lub *Brązowymi Cudzysłowami* po przekroczeniu ustalonej **liczby** cytatów zanotowanych w archiwach IMN. Najwyższym klasą był *Złoty Cudzysłów ze wstęgą Möbiusa*;
(iv) zorganizowanie studium matematyki najwspółcześniejszej: mieliśmy studentów zarówno stacjonarnych, jak i zaocznych, z UMCS w Lublinie.

Tych, którzy chcieliby zapoznać się z dorobkiem IMN bardziej szczegółowo, zachęcamy do kontaktu z Kołem Matematyków Studentów UJ (ul. W.Reymonta 4, 30-059 Kraków), które niegdyś, za zgodą IMN, wydało przygotowany dla naszych studentów skrypt *Rozmaitości absurdalne wraz z elementami logiki nieformalnej.*

Józef PIÓREK

4.4. Zagadnienie prawdy.

TWIERDZENIE (o istnieniu prawdy). Istnieje twierdzenie prawdziwe.

Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. Przytoczymy kilka najciekawszych.
1) *Dowód nie wprost (standardowy).* Jeżeli nie istnieje twierdzenie prawdziwe, to każde twierdzenie jest fałszywe. Zatem fałszywe jest twierdzenie, że nie istnieje twierdzenie prawdziwe. Toteż twierdzenie prawdziwe istnieje.
2) *Dowód teoriomnogościowy W. Forysia.* Niech D oznacza zbiór twierdzeń prawdziwych. Jeżeli $D \neq \emptyset$, to twierdzenie jest udowodnione. Jeżeli zaś $D = \emptyset$, to co z tego? Zbiór pusty też jest zbiorem.
3) *Dowód negatywny M. Bieleckiej.* Nie istnieje żaden kontrprzykład.
4) *Dowody przez podanie przykładu twierdzenia prawdziwego:*
a) *Twierdzenie Tylko-Woźniaka.*
Definicja. D jest zbiorem potraw liniowo niezależnych wtedy i tylko wtedy, gdy da się jednorazowo skonsumować bez obawy o zdrowie żołądka.
Twierdzenie. Jeżeli D jest zbiorem potraw liniowo niezależnych, to zbiór $D \cup \{\text{jedno piwo}\}$ jest zbiorem potraw liniowo niezależnych.
b) *Twierdzenie o bezmyślności Piotra B.* Non cogito ergo sum. Dowód przez obejrzenie Piotra B. w godzinach 5.30–5.35 rano.
c) *Twierdzenie patriotyczne M. Bieleckiej.* Rzetelną i twórczą pracą zapewnimy jasną przyszłość Ojczyźnie.

Zajmiemy się teraz zagadnieniem prawdy w bardziej konkretnych warunkach.
Następujące twierdzenie znane przedtem jako hipoteza kwantinuum, a odkryte przez St. Ostoję-Łojasiewicza jr. ma na celu wyjaśnić, dlaczego niektórzy wykładowcy nie używają kwantyfikatorów na swoich wykładach.

HIPOTEZA KWANTINUUM
(St. Ostoja-Łojasiewicz jr). Dla każdego twierdzenia istnieje taki układ kwantyfikatorów, przy którym to twierdzenie jest prawdziwe.

Spośród licznych prób dowodu hipotezy kwantinuum najbardziej na uwagę zasługuje dowód przeprowadzony przez J.Piórka. Weźmy twierdzenie T. Dobierzemy do niego pewien układ kwantyfikatorów K_1, który przybliża nam twierdzenie T do prawdy z prawdopodobieństwem większym niż $1/2$. „Wprawdzie ja nie definiowałem", co oznacza, że układ kwantyfikatorów przybliża twierdzenie do prawdy z pewnym prawdopodobieństwem, „ale to nie szkodzi. Wykłada się przecież rachunek różniczkowy i całkowy bez podawania definicji rachunku". Dalej, weźmy układ kwantyfikatorów K_n, który nam będzie przybliżał nasze twierdzenie do prawdy z prawdopodobieństwem $2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-n}$. W granicy otrzymamy układ kwantyfikatorów K, który przybliża twierdzenie T do prawdy z prawdopodobieństwem 1. Korzystając z ciągłej zależności prawdziwości twierdzenia od kwantyfikatorów otrzymujemy tezę hipotezy. C.b.d.u.

5.1. Ułamki kardynalne.

Niech X będzie dowolnym skończonym zbiorem niepustym. Rozważmy zbiór $\{f : \overset{\emptyset}{A} \to X\}$ (przez $\overset{\emptyset}{A}$ oznaczamy zbiór absurdalny). Biorąc pod uwagę fakt, że card $\overset{\emptyset}{A} = -1$ i korzystając ze znanych twierdzeń teorii mnogości otrzymamy, że card $X^{\overset{\emptyset}{A}} = 1/\text{card } X$, zatem zbiór $X^{\overset{\emptyset}{A}}$ ma moc ułamkową. Udowodniliśmy w ten sposób
TWIERDZENIE (o zbiorach ułomnych). Istnieją zbiory o mocy ułamkowej.
Ważnym przykładem zbioru ułomnego jest odkryty przez M. Łuczyńskiego przedział półpusty (półpunkt), tj. przedział $[x, x)$ lub $(x, x]$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wobec faktu, że $[x, x) \cup (x, x] = \{x\}$, przedział półpusty ma moc $1/2$.

Na drodze odpowiedniego dodawania mnogościowego odpowiednich zbiorów o odpowiednich liczbach kardynalnych uzyskujemy, i to nawet przez sumowanie skończone, zbiory o dowolnej liczbie kardynalnej wymiernej dodatniej. Ponieważ zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych, to przez odpowiednie nieskończone dodawanie mnogościowe odpowiednich zbiorów o odpowiednich liczbach kardynalnych otrzymamy zbiory o dowolnej liczbie kardynalnej rzeczywistej dodatniej. Udowodniliśmy w ten sposób:
TWIERDZENIE (o rzeczywistości kardynalnej A. Groblera). Liczby rzeczywiste dodatnie są kardynalne.
PRZYKŁAD zbioru o liczbie kardynalnej niewymiernej:
card $\{f : [x, x) \to \{a, b\}\} = \sqrt{2}$ $(a \neq b)$.

5.2. Liczby kardynalne zespolone.

TWIERDZENIE (o urojeniach kardynalnych A. Groblera). Istnieje zbiór o mocy i (jednostka urojona).

Dowód. Moc zbioru $I = \{f : [x, x) \to \overset{\emptyset}{A}\}$ wynosi i.

LEMAT. Prawa górna ćwiartka koła jednostkowego na płaszczyźnie jest kardynalna.
Dowód. Niech X będzie zbiorem o dowolnej nieujemnej mocy rzeczywistej r. Wówczas card $\{f : X \to \{F : [x, x) \to \overset{\emptyset}{A}\}\} = i^r$. Otrzymujemy w ten sposób dowolną liczbę z okręgu jednostkowego. Stosując podobne rozumowanie jak w twierdzeniu o rzeczywistości kardynalnej dochodzimy do prawej górnej ćwiartki koła.

TWIERDZENIE (o pierwszej ćwiartce A. Groblera). Pierwsza ćwiartka zbioru liczb zespolonych jest kardynalna.
Dowód. Pierwszą ćwiartkę napełnimy dodając do siebie mnogościowo odpowiednie zbiory odpowiednich mocy, których istnienie gwarantują powyższy lemat i twierdzenie o rzeczywistości kardynalnej. C.b.d.u.

„Matematycy mają mocne głowy i na pierwszej ćwiartce nie poprzestają". Dodając do pierwszej ćwiartki zbiór absurdalny otrzymamy liczby kardynalne z pasa (a raczej półpasa): $P = \{z : \mathrm{Re}\, z \in [-1, 0), \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$. Dalsze dodawanie zbioru absurdalnego jest niemożliwe, co wynika z jego jednoegzemplaryczności (por. §2.2). W ten sposób doszliśmy do centralnego twierdzenia absurdalnej teorii mocy, mówiącego o zbiorze liczb kardynalnych różnych od pozaskończonych:
TWIERDZENIE (A. Groblera). Po pierwszej ćwiartce mamy pas P, a za pasem broń (Boże nic innego).

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.