i trojaczków jest szczególnym przypadkiem następującego przypuszczenia L.E. Dicksona:

Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami naturalnymi o tej własności, że iloczyn

$$A(x) = x(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)$$

nie ma stałego dzielnika większego od 1, tj. nie ma takiej liczby $d > 1$, która dzieliłaby wszystkie wartości $A(1), A(2), A(3), \ldots$, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że wszystkie liczby $p + a_1, p + a_2, \ldots, p + a_n$ są liczbami pierwszymi.

W przypadku $n = 1$, $a_1 = 2$ prowadzi to do problemu bliźniaków, a w przypadku $n = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ do trojaczków.

Przed kilkunastu laty powiązano przypuszczenie Dicksona z innym starym przypuszczeniem, dotyczącym funkcji $\pi(x)$. Chodzi o to, czy dla wszystkich x, y naturalnych słuszna jest nierówność

$$(2) \qquad \pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

z której wynika, że w żadnym przedziale o danej długości N nie może być więcej liczb pierwszych niż jest ich w przedziale $[1, N]$.

Okazało się mianowicie (D. Hensley, I. Richards, 1973), że to ostatnie przypuszczenie jest sprzeczne z przypuszczeniem Dicksona, a dokładniej, że ze słuszności przypuszczenia Dicksona wynika fałszywość nierówności (2) dla pewnych wartości x, y. Zatem jedno z tych przypuszczeń (a może i oba) musi być fałszywe. T. Vehka wykazał w 1979 roku, że jeśli hipoteza Dicksona jest prawdziwa, to istnieją przedziały o długości 11763, zawierające 1412 liczb pierwszych, podczas gdy przedział $[1, 11763]$ zawiera ich jedynie 1409.

Liczby pierwsze w postępach arytmetycznych

Nietrudno wykazać, że postęp arytmetyczny $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$, złożony z liczb naturalnych postaci $4k + 3$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Gdyby bowiem tak nie było i D byłoby iloczynem wszystkich liczb pierwszych tej postaci, to jedna z liczb $D + 2$, $D + 4$ dałaby się zapisać w postaci $4m + 3$. Ponieważ iloczyn dowolnej ilości liczb pierwszych postaci $4k + 1$ jest też tej postaci, zatem liczba $4m + 3$ musiałaby mieć dzielnik pierwszy p postaci $4k + 3$, a więc dzielący D, co jest niemożliwe, bo wówczas p dzieliłoby 2 lub 4.

Wynik ten jest szczególnym przypadkiem twierdzenia, udowodnionego w 1837 roku

Nierówności funkcyjne

Marek PYCIA

Autor jest zdobywcą złotego medalu w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1992 r.

Przedstawię wybrane metody elementarnego rozwiązywania nierówności funkcyjnych na przykładzie analizy nierówności związanych z moją pracą nagrodzoną na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.

Będziemy rozważać funkcje zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych nieujemnych, które dla wszystkich s i t ze swojej dziedziny spełniają nierówność

$$(1) \qquad \frac{1}{2}f(s) + 2f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}s + 2t\right).$$

W zależności od tego, jaka będzie dziedzina funkcji f, otrzymamy jakościowo inne rozwiązania. Przyjrzyjmy się kilku możliwościom.

1. $f : R \to [0, +\infty)$. Oczywiście, funkcja stale równa 0 spełnia (1). Wykażemy, że jest to jedyne rozwiązanie tej nierówności. Łatwo zauważyć (podstawiając w (1) $s = t = 0$), że $f(0) = 0$, a stąd dla dowolnego $t \in R$

$$f(t) \underset{\text{(bo } f \text{ nieujemna)}}{\leq} \frac{1}{2}f(-4t) + 2f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}(-4t) + 2t\right) = f(0) = 0.$$

Stąd $f(t) = 0$ (gdyż $f(t) \geq 0$).

2. $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Wykażemy, że w tym przypadku jedynymi rozwiązaniami (1) są funkcje liniowe, tzn. funkcje postaci $f(t) = at$. Podobnie jak poprzednio otrzymujemy $f(0) = 0$. Składając nierówności (iterując) mamy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f(s_1) + 2f(s_2)\right) + 2\left(\frac{1}{2}f(t_1) + 2f(t_2)\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}s_1 + 2s_2\right) + 2f\left(\frac{1}{2}t_1 + 2t_2\right) \leq$$
$$\leq f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}s_1 + 2s_2\right) + 2\left(\frac{1}{2}t_1 + 2t_2\right)\right).$$

Teraz podstawiając $s_1 = t_2 = 0$, $s_2 = s$ i $t_1 = t$ otrzymujemy

$$(2) \qquad f(s) + f(t) \leq f(s + t),$$

czyli funkcja f jest tak zwaną funkcją nadaddytywną, a że wartości f są nieujemne, więc f jest niemalejąca. Podstawiając w nierówności (1) $s = 0$ uzyskujemy $2f(t) \leq f(2t)$. Natomiast podstawiając 0 w miejsce t i $2t$ w miejsce s uzyskujemy $\frac{1}{2}f(2t) \leq f(t)$. Z obu tych nierówności mamy $2f(t) = f(2t)$. Stąd natomiast nietrudno jest wykazać indukcyjnie, że $f(2^m t) = 2^m f(t)$ dla każdego m całkowitego (m może być ujemne). Udowodnimy teraz, że dla każdego k naturalnego $f(kt) = kf(t)$. Istotnie. Nietrudno jest wykazać indukcyjnie (korzystając z (2)), że $f(kt) \geq kf(t)$. Wystarczy więc wykazać, że zachodzi nierówność przeciwna, tzn. $f(kt) \leq kf(t)$. Wykażemy to też za pomocą indukcji. Dla $k = 1$ – oczywiste. Załóżmy teraz, że nierówność ta zachodzi dla liczb naturalnych mniejszych od k. Udowodnimy ją dla k. Otóż, jeżeli k jest parzyste, to

$$f(kt) = 2f\left(\frac{k}{2}t\right) \underset{\text{(zał. ind.)}}{\leq} 2 \cdot \frac{k}{2}f(t) = kf(t).$$

Jeżeli k jest nieparzyste, to

$$f(kt) \underset{\text{(wobec (2))}}{\leq} f((k+1)t) - f(t) = 2f\left(\frac{k+1}{2}t\right) - f(t) \leq$$

$$\underset{\text{(zał. ind.)}}{\leq} 2\left(\frac{k+1}{2}\right) f(t) - f(t) = kf(t).$$

Łącząc uzyskane równości otrzymujemy, że

(3) $\quad f(k \cdot 2^m) = k \cdot 2^m f(1) \quad$ dla $k \in N$ i $m \in Z$.

Zbiór A liczb postaci $k \cdot 2^m$ jest gęsty w $(0, +\infty)$. Oznacza to, że dla dowolnej liczby dodatniej t znajdziemy takie dwa ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ze zbioru A (tzn. każdą z liczb a_n i b_n można przedstawić w postaci $k \cdot 2^m$), że

$$a_n \leq t \leq b_n \quad \text{oraz} \quad a_n \to t, \quad b_n \to t.$$

Skąd wobec (3) i monotoniczności f mamy

$$a_n f(1) = f(a_n) \leq f(t) \leq f(b_n) = b_n f(1).$$

Przechodząc do granicy mamy

$$tf(1) \leq f(t) \leq tf(1),$$

czyli $f(t) = tf(1)$, a więc funkcja f jest liniowa.

Zauważmy, że nie tylko postać dziedziny funkcji f, ale i postać zbioru wartości ma decydujące znaczenie dla rozwiązywalności nierówności (1). Widzieliśmy, że wśród funkcji $f : R \to [0, +\infty)$ tylko funkcja stale równa zeru jest rozwiązaniem. Stąd wśród funkcji $f : R \to (0, \infty)$ nierówność (1) rozwiązań nie ma. Natomiast gdybyśmy szukali rozwiązań wśród funkcji $f : R \to R$, to można udowodnić korzystając z pewnego twierdzenia G. Hamela istnienie rozwiązań, których wykres jest gęstym podzbiorem płaszczyzny R^2 (tzn., że w każdym otoczeniu dowolnego punktu płaszczyzny znajdują się punkty wykresu)! Co więcej, rozwiązania te są addytywne, to znaczy spełniają warunek $f(s+t) = f(s) + f(t)$. Warunek ten jest silniejszy niż nierówność (1).

Nierówność (1) to szczególny przypadek następującej nierówności funkcyjnej

(4) $\quad af(s) + bf(t) \leq f(as + bt),$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi, a f jest, dla ustalenia uwagi, funkcją z $[0, +\infty)$ w $[0, +\infty)$.

Jeżeli $a + b = 1$, to nierówność (4) jest równoważna nierówności definiującej wklęsłość funkcji

$$\lambda f(s) + (1-\lambda) f(t) \leq f(\lambda s + (1-\lambda)t) \quad \text{dla wszystkich } \lambda \in [0,1]$$

(wynika to z pewnych twierdzeń Kuhna, Daróczego, Pálesa, i Bernsteina-Doetscha).

Gdy $a + b < 1$, pojawiają się rozwiązania nieciągłe (zgodnie z rezultatami K. Barona, J. Matkowskiego i K. Nikodema); podobnie jest, gdy $a + b \geq 1$. Przypadek $a < 1 < a + b$ (zbadany przez J. Matkowskiego) można sprowadzić do przypadku $a < 1 < b$ (iterowanie!), a rozwiązaniami tego ostatniego są wyłącznie funkcje liniowe. Dowód daje się poprowadzić dla niektórych wartości stałych a i b tak jak w punkcie 2. W ogólnym jednak przypadku trzeba sobie radzić trochę inaczej.

Wszystkie te wyniki są znane. Czym zatem zajmowałem się w pracy konkursowej? – innymi przypadkami nierówności

(5) $\quad \alpha f(s) + \beta f(t) \leq f(as + bt),$

gdzie $f : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, α, β, a, b są stałymi dodatnimi oraz $a < 1 < b$. Przy tym założeniu udało się udowodnić, że *jeżeli dla danych a, b, α, β nierówność (5) ma rozwiązanie niezerowe, to ma także rozwiązanie potęgowe.* Pomogło to opisać klasy rozwiązań (5) (podobnie jest z nierównością $\alpha f(s) + \beta f(t) \geq f(as + bt)$, gdy $\lim_{s \to \infty} f(s) = 0$).

przez P.G. Lejeune Dirichleta, a głoszącego, że każdy postęp arytmetyczny, utworzony z liczb naturalnych, którego pierwszy wyraz jest względnie pierwszy z różnicą postępu, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Powstaje pytanie, jak duża może być najmniejsza liczba pierwsza leżąca w takim postępie. Z hipotezy Riemanna można wydedukować, że jeśli c jest dowolną liczbą większą od 2, oraz d jest dostatecznie dużą liczbą naturalną, to w każdym z postępów arytmetycznych

$$dk + a \quad (k = 1, 2, \ldots;$$
$$1 \leq a < d,$$
$$(a, d) = 1)$$

znajduje się liczba pierwsza nie przekraczająca d^c. W 1944 roku J.V. Linnik udowodnił (bez żadnych nieudowodnionych hipotez), że to twierdzenie jest słuszne dla pewnego, zresztą bardzo dużego, wykładnika c. Problemem zmniejszenia wielkości c w twierdzeniu Linnika zajmowało się wielu autorów. Przedostatni rekord należy do J.R. Chena i J.M. Liu, którzy w 1989 roku wykazali, że za c można przyjąć dowolną liczbę większą od 13,5, a zupełnie świeżo, bo w 1991 roku, Wang Wei zastąpił tu liczbę 13,5 przez 8.

Problem Goldbacha

W 1742 roku G. Goldbach zapytał, czy każda liczba parzysta, większa od 4, jest sumą dwóch liczb pierwszych nieparzystych i czy każda liczba nieparzysta, większa od 7, jest sumą trzech liczb pierwszych nieparzystych. Pytanie to nosi nazwę problemu Goldbacha, a pełnej odpowiedzi na nie dotąd nie znamy.

Pierwszy krok w kierunku rozwiązania tego problemu uczynili w 1922 roku G.H. Hardy i J.E. Littlewood, którzy przy użyciu pewnych hipotez, będących uogólnieniem hipotezy Riemanna (a dotąd nie udowodnionych) udowodnili, że każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych nieparzystych. W 1937 roku I.M. Winogradow uzyskał tenże wynik, już bez użycia żadnych nieudowodnionych hipotez. Niedawno J.R. Chen i T.Z. Wang wykazali, że każda liczba nieparzysta większa od

$$e^{e^{11,503}}$$

jest sumą trzech liczb pierwszych. Niestety, liczba ta jest zbyt duża, by sprawdzić przypuszczenia Goldbacha dla wszystkich mniejszych liczb nieparzystych. Sprawdzenia takiego dokonano jedynie dla liczb nie przekraczających $2 \cdot 10^{10}$ (A. Granville, J. van de Lune, H.J.J. te Riele, 1989).

W problemie Goldbacha dla liczb parzystych postęp był znacznie mniejszy. Dziś wiemy jedynie, że ilość liczb parzystych, mniejszych od x, które nie są sumami dwóch liczb pierwszych, nie przekracza cx^{δ}, gdzie c jest pewną stałą i $\delta < 1$ (H.L. Montgomery, R.C. Vaughan, 1971), a nadto każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i liczby, która jest bądź pierwsza, bądź też jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych (J.R. Chen, 1973).

Wszystkie te wyniki uzyskano za pomocą trudnych środków analitycznych. Prostsze podejście zaproponował w 1930 roku L.G. Schnirelman, który za pomocą elementarnych metod udowodnił istnienie takiej liczby M, że każda liczba naturalna jest sumą co najwyżej M liczb pierwszych. Najmniejsza taka liczba M nosi nazwę *stałej Schnirelmana*, a przypuszczenie Goldbacha jest równoważne równości $M = 3$. Pierwsza wartość M była ogromna, ale obecnie udało się ją znacznie zmniejszyć, a rekord należy do H. Riesela i R.C. Vaughana, którzy w 1983 roku wykazali, że można przyjąć $M = 18$.

Rozwiązanie zadania M. 668. Niech S oznacza sumę naszego szeregu; w układzie siódemkowym mamy

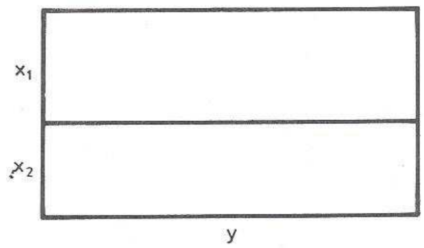
$$S = 0{,}1001000010000001\ldots,$$

a dobrze wiadomo, że liczba o nieokresowym rozwinięciu (w jakimkolwiek układzie!) jest niewymierna.

Komentarz do artykułu Marka Pyci

W artykule Marka Pyci (str. 4), punkt 2, zostało udowodnione, że funkcja spełniająca podaną tam nierówność (1) (np. spełniają ją funkcje addytywne, tj. takie, że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych x i y), mająca za dziedzinę i zbiór wartości zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, jest funkcją liniową, tj. postaci $f(t) = at$, dla stałego a. Wynika stąd od razu, że jedynym możliwym wzorem na pole prostokąta o bokach x i y jest αxy, gdzie α jest stałą (zależną od wyboru jednostki długości).

Oznaczmy bowiem pole prostokąta przez $P(x, y)$.



Rys. 1

Z rysunku 1 wynika, że

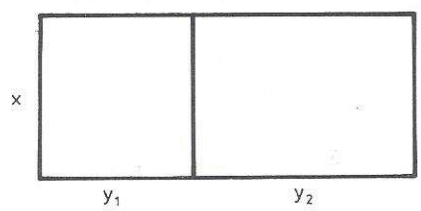
$$P(x_1 + x_2, y) = P(x_1, y) + P(x_2, y).$$

Ustalmy wartość y. Zgodnie z dowodem Marka Pyci funkcja $f_y(x) = P(x, y)$, jako spełniająca równość

$$f_y(x_1 + x_2) = f_y(x_1) + f_y(x_2),$$

jest postaci $f_y(x) = a(y) \cdot x$.

Spójrzmy teraz na rysunek 2.



Rys. 2

Mamy

$$P(x, y_1 + y_2) = P(x, y_1) + P(x, y_2).$$

A zatem

$$f_{y_1+y_2}(x) = f_{y_1}(x) + f_{y_2}(x).$$

Mamy więc dla dowolnego x

$$a(y_1 + y_2)x = a(y_1)x + a(y_2)x,$$

w szczególności, dla $x = 1$,

$$a(y_1 + y_2) = a(y_1) + a(y_2).$$

Znów odwołując się do tego samego dowodu otrzymujemy, że $a(y) = \alpha \cdot y$, gdzie α jest stałą.
Zatem $P(x, y) = f_y(x) = a(y)x = \alpha xy$, co chcieliśmy wykazać.

Inny dowód tego samego faktu można znaleźć w artykule Marka Kuczmy (co jeden, to Marek), w *Delcie* 1/1977 lub 7/1983.

Marek KORDOS