Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1993

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 257, 258

Redaguje Marcin E. KUCZMA

257. Czworościan o krawędziach długości a, b, c, d, e, f jest wpisany w sferę o środku O i promieniu R. Niech O' będzie środkiem sfery przechodzącej przez środki ciężkości czterech ścian czworościanu. Obliczyć odległość punktu O' od punktu O.

258. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n > 0$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{s-x_i}\right)^{\alpha} \geq \frac{n}{(n-1)^{\alpha}}, \quad \text{gdzie } s = x_1 + \ldots + x_n .$$

Zadanie **258** zaproponował pan Adam Czornik z Bytomia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1992

Przypominamy treść zadań:

249. Wykazać zbieżność i obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_1 = 1/(x+1)$, $a_n = (n/(x+n)) \prod_{j=1}^{n-1} (x-j)/(x+j)$ dla $n \geq 2$, a x jest daną liczbą dodatnią.

250. Wyznaczyć wszystkie liczby $n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ spełniające warunek: dla każdej liczby naturalnej $k \geq 4$ można umieścić w przestrzeni $4k$ przystających kostek sześciennych tak, aby każda miała dokładnie n ścian wspólnych z innymi kostkami.

249. Dla $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{x+n} \cdot \frac{x-n+1}{n-1} . \tag{1}$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych n (powiedzmy, dla $n \geq n_0$) prawdziwa jest nierówność

$$n^2|n-1-x| < 2(n-1)^2(n+x);$$

stąd, wobec (1),

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| < 2 \cdot \frac{n-1}{n} \qquad \text{dla} \quad n \geq n_0$$

i w konsekwencji otrzymujemy (dla $n > n_0$):

$$|a_n| = \left|a_{n_0} \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}}\right| < 2|a_{n_0}| \cdot \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{k-1}{k} = 2|a_{n_0}| \cdot \frac{n_0}{n} .$$

Zatem $\lim a_n = 0$.

Przepiszmy teraz zależność (1) w postaci

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right) a_k = \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) a_{k-1} ,$$

czyli – oznaczając $c_k = a_k x/k$:

$$a_{k-1} + a_k = c_{k-1} - c_k . \tag{2}$$

Niech $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Sumujemy stronami równości (2) dla $k = 2, \ldots, n$ i otrzymujemy wzór:

$$2s_n = a_1 + a_n + c_1 - c_n = 1 + a_n - c_n .$$

Wcześniej stwierdziliśmy, że ciąg (a_n) dąży do zera. Tym bardziej ciąg (c_n) dąży do zera. Wobec tego ciąg $(2s_n)$ dąży do jedności, i ostatecznie

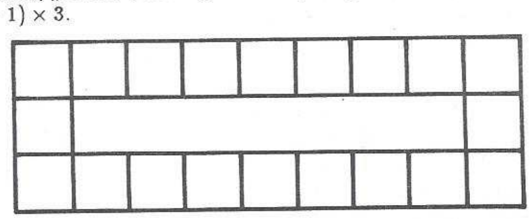
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2} .$$

250. Wykażemy najpierw, że na płaszczyźnie nie można umieścić skończonej liczby przystających kwadratów tak, aby każdy miał co najmniej trzy boki wspólne z innymi kwadratami. Przypuśćmy, że jest to możliwe i że mamy taki układ kwadratów. Jeśli rozpada się on na kilka oddzielnych układów, będziemy w dalszym ciągu rozważać tylko jeden z nich; nie prowadzi to do straty ogólności. Istnieje prosta zawierająca bok co najmniej jednego kwadratu i taka, że wszystkie kwadraty rozważanego układu leżą po jednej jej stronie. Boki zawarte w tej prostej wyznaczają na niej skończoną liczbę odcinków. Weźmy punkt będący „skrajnym końcem skrajnego odcinka" (tj. takim, że wszystkie odcinki leżą na jednej z półprostych, na które dzieli on daną prostą). Punkt ten jest jednocześnie wierzchołkiem kwadratu naszego układu, mającego co najwyżej dwa boki wspólne z innymi kwadratami.

Przypuśćmy teraz, że mamy w przestrzeni skończony układ sześcianów, z których każdy ma z innymi sześcianami co najmniej cztery ściany wspólne. Jak w przypadku kwadratów, jeśli konstrukcja składa się z kilku oddzielnych układów, bierzemy do dalszych rozważań tylko jeden z nich. Znajdujemy płaszczyznę zawierającą ścianę co najmniej jednego sześcianu i taką, że wszystkie sześciany rozważanego układu leżą po jednej jej stronie. Ściany zawarte w tej prostej wyznaczają na niej pewną konfigurację kwadratów, wśród których istnieje kwadrat mający z pozostałymi co najwyżej dwa boki wspólne (to zostało wykazane przed chwilą). Kwadrat ten jest ścianą sześcianu, mającego z innymi sześcianami wspólne co najwyżej trzy ściany.

Wynika stąd, że żadna liczba $n \geq 4$ nie spełnia warunku, o którym mowa w zadaniu.

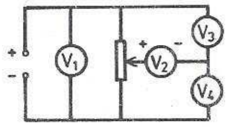
Natomiast dla $n = 0, 1, 2, 3$ można utworzyć żądane konfiguracje. Dla $n = 0, 1$ jest to oczywiste; dla $n = 2$: budujemy z $4k$ kostek „ramkę" o wymiarach zewnętrznych $(2k-1) \times 3$ oraz wewnętrznych $(2k-3) \times 1$; rysunek ilustruje przypadek $k = 5$. Wreszcie dla $n = 3$ budujemy z $4k$ kostek podobną „ramkę", ale o grubości 2, o wymiarach zewnętrznych $(k-1) \times 3$.



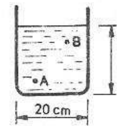
Tak więc postulowany warunek spełniają liczby $n = 0, 1, 2, 3$, i tylko one.

Zadania z fizyki nr 155, 156

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1



Rys. 2

155. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 wszystkie woltomierze są jednakowe. Ile wskazują V_3 i V_4, jeśli $V_1 = 12$ V, a $V_2 = 2$ V?

156. Ciało o masie M porusza się swobodnie z prędkością v_0 w kierunku nieruchomej ściany. Gdy znajduje się w odległości d od niej, następuje zderzenie z początkowo nieruchomą kulką o pomijalnych rozmiarach i masie m znacznie mniejszej od M. Zakładamy, że dalszy ruch kulki zachodzi wzdłuż tej samej prostej, co ruch ciała, a jej zderzenia z ciałem i ścianą są doskonale sprężyste. Obliczyć w przybliżeniu (dla $m \ll M$) minimalną odległość zbliżenia ciała do ściany.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1992

Przypominamy treść zadań:

147. Dwie doskonale sprężyste kulki poruszają się z jednakową prędkością v po linii prostej tak, że ich tory pokrywają się. Na drodze kulek jest prostopadła sprężysta ściana, od której pierwsza kulka się odbija, a potem zderza z drugą.
a) Jaką maksymalną prędkość może uzyskać druga kulka, gdy zderzą się jeden raz?
b) Jaką maksymalną prędkość może uzyskać druga kulka, gdy zderzą się dwa razy?
c) W jakim przedziale musi leżeć stosunek $\frac{m_2}{m_1}$, aby kulki zderzyły się dwa razy i nastąpiły też dwa uderzenia o ścianę?
d) W jakim przedziale musi leżeć stosunek $\frac{m_2}{m_1}$, aby kulki zderzyły się trzy razy i nastąpiły cztery uderzenia o ścianę?

148. Dziesięć kilogramów wody nalano do prostopadłościennego naczynia – przyjmijmy rozmiary dna np. 20 × 25 cm, wysokość 20 cm. W punkcie A (rys. 2) umieszczono grzałkę o mocy 100 W, a w punkcie B – chłodnicę o mocy -100 W. Ocenić orientacyjnie średnią prędkość krążenia wody w naczyniu.
Dane: współczynnik rozszerzalności objętościowej wody wynosi $2 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}, lepkość wody 0,01 puaza = 0,001 N·s/m^2.

---

147. Zadanie wymaga skorzystania ze znanych wzorów na prędkości v_1 i v_2 kulek po zderzeniu sprężystym prostoliniowym, jeśli przed zderzeniem prędkości te były równe u_1 i u_2:

$$(1)\qquad \begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 , \\ v_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 . \end{aligned}$$

W przypadku pojedynczego zderzenia podstawiając $u_2 = -v$, $u_1 = v$ (po odbiciu od ściany) otrzymujemy $v_2 = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$. Prędkość ta jest tym większa, im większy jest iloraz m_1/m_2 i asymptotycznie osiąga wartość $3v$ – jest to odpowiedź na pytanie a). Aby odpowiedzieć na pytania b) i c), zbadajmy także prędkość $v_1 = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v$. Jeśli $\frac{m_2}{m_1} > \frac{1}{3}$, to ta prędkość jest ujemna, czyli nastąpi drugie uderzenie o ścianę i v_1 zmieni zwrot. Kulka 1 może wtedy dogonić kulkę 2 – pod warunkiem, że

$$\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} > \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{czyli } m_2 > m_1 .$$

Stosując powtórnie wzory (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \\ &= \frac{v}{(m_1 + m_2)^2} \left(-m_1^2 + 10 m_1 m_2 - 5 m_2^2 \right) , \\ v_2' &= \frac{v}{(m_1 + m_2)^2} \left(-5m_1^2 + 10 m_1 m_2 - m_2^2 \right) . \end{aligned}$$

Wielkość v_2' osiąga maksymalną wartość $v_2' = 1,25v$ dla stosunku $\frac{m_2}{m_1} = \frac{5}{3}$ (odpowiedź na pytanie b)). Aby nie nastąpiło trzecie uderzenie o ścianę, prędkość v_1' musi być nieujemna – stąd $\frac{m_2}{m_1} \le 1 + \sqrt{0,8} \approx 1,8944$. Odpowiedź na pytanie c) brzmi zatem

$$1 < \frac{m_2}{m_1} \le 1,8944 .$$

Nietrudno sprawdzić, że trzecie zderzenie kulek nastąpi przy $\frac{m_2}{m_1} > 3$. Powtarzając raz jeszcze nakreślony wyżej schemat obliczeniowy można wyliczyć odpowiedź na pytanie d)

$$4,312 < \frac{m_2}{m_1} \le 5,828 .$$

148. Przyjmijmy dla uproszczenia, że całość wody jednakowo się ogrzewa mijając grzałkę i oziębia mijając chłodnicę. Jeśli oznaczymy średnią prędkość jako v, to przyjmując „średnią drogę obiegu" równą 40 cm (w odległości 5 cm od ścianek) mamy średni okres obiegu równy $\frac{0,4\ \mathrm{m}}{v}$. Mnożąc ten czas przez moc grzałki możemy przyrównać otrzymane wyrażenie do iloczynu masy wody przez ciepło właściwe i przyrost temperatury:

$$100\ \mathrm{W} \cdot \frac{0,4\ \mathrm{m}}{v} = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot 10\ \mathrm{kg} \cdot \Delta T .$$

Pomijając jednostki mamy $\Delta T = 10^{-3} \cdot \frac{1}{v}$. Siłą powodującą krążenie wody jest różnica ciężarów wody w lewej i prawej części, równa $\Delta m \cdot g = V \Delta\rho \cdot g$ (gdzie V – objętość połowy naczynia). Różnicę gęstości możemy zaś w przybliżeniu zapisać w postaci iloczynu gęstości przez współczynnik rozszerzalności i przyrost temperatury. Stąd siła

$$F = 5\ \mathrm{kg} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \mathrm{K}^{-1} \cdot \Delta T \cdot 10\ \mathrm{m/s}^2 ,$$

a pomijając jednostki i podstawiając ΔT mamy

$$F = 10^{-5} \cdot \frac{1}{v} .$$

Siłę tę przyrównamy do siły tarcia warstw cieczy opisywanej wzorem

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} ,$$

gdzie S – powierzchnia warstw, η – współczynnik lepkości, Δv – różnica prędkości warstw odległych o Δz. W naszym przypadku przyjmijmy, że prędkość tuż przy ściance jest równa zeru, a w odległości 5 cm od niej jest równa podwojonej prędkości średniej. Niech powierzchnia S będzie równa 25 cm × 15 cm × 3 (uwzględniamy tarcie o trzy ścianki, pomijając dla uproszczenia ścianki równoległe do płaszczyzny rysunku). Stąd

$$F = 0,1\ \mathrm{m}^2 \cdot 0,001 \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{2v}{0,05\ \mathrm{m}} = 4 \cdot 10^{-3} v ,$$

gdzie w ostatnim wyrażeniu pominęliśmy jednostki. Przez porównanie z siłą napędową otrzymujemy ostateczny wynik

$$v = \frac{1}{20} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} .$$

Dokonując bardziej precyzyjnych oszacowań można zapewne uzyskać wynik dokładniejszy. Nie sądzę jednak, aby ścisły wynik różnił się od wartości 5 cm/s więcej niż dwa razy.