

Czy natura oscylatora harmonicznego nie jest bardziej skomplikowana niż przypuszczaliśmy?

Wojciech KRÓLIKOWSKI

Wśród prostych układów dynamicznych jednym z najbardziej podstawowych teoretycznie, a jednocześnie najpopularniejszych w zastosowaniach fizycznych i technicznych, jest jednowymiarowy oscylator harmoniczny. Wystarczy wspomnieć, że wszechobecne w naszym życiu codziennym pole elektromagnetyczne można uważać z dynamicznego punktu widzenia za pewien (nieskończony) zbiór takich oscylatorów.

W mechanice klasycznej ruch jednowymiarowego oscylatora harmonicznego opisujemy równaniem Newtona

$$(1) \quad m\ddot{x} = -m\omega^2 x,$$

gdzie \ddot{x} jest drugą pochodną względem czasu t współrzędnej x określającej wychylenie oscylatora z położenia równowagi $x = 0$, m zaś i ω oznaczają masę i częstość (kołową) oscylatora. Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego drugiego rzędu (1) ma postać drgania harmonicznego o częstości ω :

$$(2) \quad x = A \sin(\omega t + f),$$

przy czym dwie stałe dowolne, A i f , są amplitudą i przesunięciem fazy tego drgania (można je wyznaczyć z warunków początkowych w pewnej chwili $t = t_0$: $x(t_0) = x_0$ i $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, gdzie x_0 i \dot{x}_0 są danymi stałymi). Energię jednowymiarowego oscylatora harmonicznego określa wzór

$$(3) \quad H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2),$$

gdzie $p = m\dot{x}$ przedstawia pęd oscylatora. Ze związków (2) i (3) otrzymujemy wartość energii oscylatora:

$$(4) \quad H = E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

Gdy od mechaniki klasycznej przechodzimy do mechaniki kwantowej, rolę współrzędnej x i pędu p przejmują pewne macierze kwadratowe (o nieskończonej liczbie wierszy i kolumn). Oznaczmy je przez \hat{x} i \hat{p} . Jak wiadomo (przynajmniej niektórym z Czytelników, obeznanym nieco bliżej z pojęciem macierzy), mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne w odróżnieniu od mnożenia liczb (rzeczywistych i zespolonych). Można się więc spodziewać, że $\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$. Rzeczywiście, podstawowym prawem mechaniki kwantowej jest relacja nieprzemienności Heisenberga

$$(5) \quad \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar,$$

gdzie \hbar oznacza stałą Plancka dzieloną przez 2π o wartości doświadczalnej $1,05457266 \times 10^{-34}$ J-s (zauważmy, że gdyby \hbar było równe 0, wielkości fizyczne \hat{x} i \hat{p} stałyby się przemienne, a wtedy wrócilibyśmy do mechaniki klasycznej). Dla porządku dodajmy, że po prawej stronie relacji (5) przy \hbar występuje domyślnie macierz jednostkowa $\hat{1}$ (tzn. macierz o samych jedynkach na przekątnej głównej), której zwykle nie wypisujemy. W konsekwencji macierzowego charakteru \hat{x} i \hat{p} rolę energii H danej wzorem (3)

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (V)

(Według wykładów radiowych
z audycji IV programu – *Widnokraj*)

Gorąca woda zamarznie
szybciej niż zimna

Tomasz HOFMOKL

W tym cyklu wykładów opowiadam Państwu o doświadczeniach, których wynik jest na tyle zaskakujący, że zdaje się przeczyć zdrowemu rozsądkowi. Na podstawie wiedzy nabytej i uogólnień doświadczeń życia codziennego wyrabiamy sobie kryteria tego, co jest możliwe, a co nie powinno żadną miarą się zdarzyć. Zakres naszych doświadczeń jest na ogół ograniczony i dlatego trudno się spodziewać, aby nasz zdrowy rozsądek mógł być arbitrem we wszystkich sytuacjach, zdarzających się w przyrodzie. Warto to sobie uświadomić; uczy to nas z jednej strony podziwu dla bogactwa otaczającego nas świata, a z drugiej sugeruje większą pokorę przy ocenie własnych możliwości osądu, co jest możliwe, a co nie.

Dziś zacznę moją pogawędkę od bardzo prostego zjawiska, a skończę na nieco trudniejszym. Oba zjawiska łączy proces oddawania do otoczenia ciepła. Historię można by zacząć dowolnie dawno. Ludzie mieszkający w krajach o zimnym klimacie zauważyli, że woda zimna zamarza na mrozie wolniej niż woda podgrzana. Uważano, że poidełka dla ptaków lepiej napełniać zimną wodą, a w nowszych czasach, że lepiej myć samochód zimną wodą, jeżeli jest on narażony na działanie mrozu. Były to poglądy na granicy przesądu do czasu, gdy zjawisko to zaczęto badać systematycznie.

Zaczął się wszystko na zajęciach w szkole wyższej w Tanzanii. Jednym z zadań dla studentów było sporządzenie lodów, zwykłych jadalnych lodów. Instrukcja, a ściślej mówiąc, receptura, nakazywała podgrzanie mleka, zmieszanie go z cukrem, ostudzenie mieszanki do temperatury pokojowej, a następnie zamrożenie w elektrycznym zamrażalniku. Wśród studentów, którzy przyrządzali lody był Erasto Mpemba. Tego dnia on i jego kolega z jakiegoś powodu bardzo

się spieszyli. Erasto nie miał cierpliwości poczekać, aż mieszanina ostygnie do temperatury pokojowej, a jego kolega nie zatroszczył się nawet o podgrzanie swojej porcji. Obaj włożyli przygotowane porcje równocześnie do zamrażalnika. Porcja Erasto była ciepła, może nawet gorąca, a porcja kolegi chłodna. Ku wielkiemu zdumieniu Mpemba stwierdził, że to jego, początkowo gorąca, mieszanka zamarza znacznie wcześniej niż mieszanka chłodna. Sprawa nabrała rozgłosu, gdy Mpemba wraz z D.G. Osbornem z University College Dar es Salaam opublikowali sprawozdanie w czasopiśmie *Physics Education*. Przez pewien okres czasopismo otrzymywało wiele listów ze stwierdzeniami, że efekt jest fałszywy, spowodowany jakimś błędem lub wprost przeciwnie, że zjawisko to jest dobrze znane. Dziś wiemy, że zjawisko to jest rzeczywiste, ale do końca nie znamy pełnego wyjaśnienia. Szereg czynników może być odpowiedzialnych za jego przebieg. W ciepłym płynie może być lepszy przepływ niż w zimnym i w związku z tym lepsza wymiana ciepła z otoczeniem. Wiadomo również, że w ciepłym płynie jest mniej rozpuszczonego gazu (powietrza) niż w zimnym. Rozpuszczony gaz spowalnia stygnięcie. Wiadomo, że rury z ciepłą wodą w domowej instalacji zamarzają w czasie awarii niekiedy wcześniej niż rury z zimną wodą, którą chroni rozpuszczone powietrze. Może jakąś rolę odgrywa fakt, że ciepły płyn szybciej paruje niż zimny i w rezultacie, nawet jeżeli na początku ilości płynu były jednakowe, to zamarza mniej płynu z ciepłego naczynia niż zimnego, bo część z ciepłego zdążyła wyparować. Nie chcę Państwu niczego sugerować, sam nie jestem pewny, co jest najważniejszym czynnikiem wywołującym wspomniany efekt. Proponuję natomiast wykonanie tego doświadczenia z użyciem małych pojemników na wodę i domowej zamrażarki.

Tak jak obiecałem, przejdę teraz do drugiego zjawiska, które określiłem jako trudniejsze. Uświadomiłem sobie, że tak naprawdę to jest ono nawet prostsze niż studzenie mleka z cukrem. Trudniejsze jest coś, co nie zgadza się ze zdrowym rozsądkiem. Cofnijmy się do początków naszego stulecia i zajmijmy się nie rozwiązaniem w tym czasie problemem, jakim było promieniowanie ciała doskonale czarnego. Niech nikogo nie zniechęca określenie ciała doskonale czarne. To tylko uproszczenie zagadnienia, bo wtedy nie musimy definiować, jakiego koloru jest

przejmuje w mechanice kwantowej macierz

$$(6) \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2).$$

Ogólniej, w mechanice kwantowej macierze kwadratowe (zwykle o nieskończonej liczbie wierszy i kolumn) opisują wielkości fizyczne. Prosimy Czytelnika o potraktowanie tego stwierdzenia jako wstępnej informacji, która, być może, zachęci Go do samodzielnej próby zapoznania się z elementami mechaniki kwantowej (w tym celu można by polecić podręcznik przeznaczony dla początkujących studentów uniwersytetu: E. H. Wichmann, *Fizyka kwantowa*, PWN, Warszawa 1973). Tutaj ograniczymy się do pewnej uwagi wskazującej na podstawową przyczynę sprawiającą, że właśnie macierze są odpowiednie do opisu wielkości fizycznych w świecie atomowym rządzonego prawami mechaniki kwantowej. Otóż, można ogólnie powiedzieć, że fizyka, badając pewien układ (fizyczny), rozważa zmiany jego stanu, a więc przejścia układu między różnymi parami jego stanów. W odróżnieniu od naszego makroświata, w świecie atomowym pomiar każdej wielkości fizycznej (nawet „maksymalnie subtelny”) powoduje (na ogół) zaburzenie stanu układu prowadzące do przejść między różnymi parami jego stanów. Stąd wszystkie możliwe pary stanów układu powinny być jakoś zakodowane w opisie wielkości fizycznych określonych dla tego układu. Właśnie tym różnym parom stanów odpowiadają różne elementy macierzy kwadratowych opisujących wielkości fizyczne w mechanice kwantowej.

Jawny kształt macierzy energii (6) łatwiej można znaleźć operując zamiast \hat{x} i \hat{p} macierzami określonymi przez wzory

$$(7) \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\hat{p} \right),$$

$$\hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\hat{p} \right).$$

Wtedy prosty rachunek pokazuje, że relacja nieprzemienności (5) sprowadza się do postaci

$$(8) \quad \hat{a}\hat{a}^* - \hat{a}^*\hat{a} = 1,$$

macierz energii (6) zaś – do postaci

$$(9) \quad \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^*\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^*)\hbar\omega.$$

Nietrudno się przekonać wykonując mnożenie macierzy według reguły „wiersze przez kolumny”, tzn. $\hat{A}\hat{B} = \|\|C_{kl}\|\|$, gdzie $C_{kl} = \sum_m A_{km}B_{mi}$, że relację nieprzemienności (8) można spełnić za pomocą macierzy

$$(10) \quad \hat{a} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad \hat{a}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

przy czym wtedy macierz energii (9) przyjmuje kształt

$$(11) \quad \hat{H} = \begin{vmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & E_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

gdzie

$$(12) \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Podstawowym prawem interpretacyjnym mechaniki kwantowej jest stwierdzenie, że jeśli macierz opisująca pewną wielkość fizyczną, np. energię, ma postać diagonalną (tzn. zawiera wyrazy niezerowe jedynie na przekątnej głównej), wtedy liczby (rzeczywiście) występujące na przekątnej głównej przedstawiają możliwe wartości tej wielkości fizycznej (możliwe wyniki jej pomiarów). A zatem, z postaci (11) macierzy \hat{H} wynika, że wartości energii jednowymiarowego oscylatora harmonicznego w mechanice kwantowej są dane wzorem (12) (są więc nieciągłe, „skwantowane”).

Zauważmy teraz, że stosując analogiczną metodę algebraiczną można rozwiązać pewną „zdeformowaną” relację nieprzemienności, postaci wykraczającej poza mechanikę kwantową oscylatora harmonicznego, mianowicie relację

$$(13) \quad \hat{a}\hat{a}^* - q\hat{a}^*\hat{a} = 1,$$

gdzie $q > 0$ jest nowym parametrem, w ogólności różnym od 1 (zauważmy, że dla $q \rightarrow 1$ wracamy do mechaniki kwantowej).

Rzeczywiście, relację tę można spełnić za pomocą macierzy

$$(14) \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{N_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{N_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N_3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{N_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{N_2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{N_3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

gdzie liczby

$$(15) \quad N_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

są powiązane wzorem rekurencyjnym

$$(16) \quad N_{n+1} = qN_n + 1,$$

przy czym $N_0 = 0$. Wtedy macierz energii (9) uzyskuje postać (11), gdzie jednak zamiast wzoru (12) pojawia się nowy wzór

$$(17) \quad E_n = \left(\frac{q+1}{2} N_n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Dla $q \rightarrow 1$ wracamy do dawnego wzoru (12).

Logiczną atrakcyjność rozważań nad „zdeformowaną” relacją nieprzemienności (13) można uzasadnić następująco. Relacja nieprzemienności (8) występująca w mechanice kwantowej oscylatora harmonicznego jest najprostszą realizacją nieprzemienności $\hat{a}\hat{a}^* \neq \hat{a}^*\hat{a}$ macierzy \hat{a} i \hat{a}^* . Można postawić pytanie, czy nie występują dla fizycznych oscylatorów pewne odchylenia od tej realizacji (naturalnie, jeśli takie odchylenia rzeczywiście występują, to muszą być znikome, bo, jak dotąd, mechanika kwantowa jest zgodna w swych przewidywaniach ze wszystkimi doświadczeniami). W tej sytuacji ogólna liniowa realizacja nieprzemienności postaci $\hat{a}\hat{a}^* = q\hat{a}^*\hat{a} + r$, gdzie $q \simeq 1$ oraz $r \simeq 1$, jest szczególnie interesująca (przez normalizację \hat{a} i \hat{a}^* można zawsze osiągnąć, aby r było równe dokładnie 1, a wtedy otrzymujemy relację (13)).

Ze względu na swą postać przekraczającą ramy mechaniki kwantowej oscylatora harmonicznego teoria „zdeformowanego algebraicznie” oscylatora harmonicznego wzbudza od paru lat znaczne zainteresowanie wśród fizyków-teoretyków, a zwłaszcza wśród matematyków. Ponieważ jednak nie obserwuje się, jak dotąd, żadnych odchyżeń doświadczalnych od przewidywań mechaniki kwantowej, deformacja realnych oscylatorów harmonicznyczych występujących w przyrodzie (jeśli w ogóle ma miejsce) musi być znikoma (tzn. musi być $q \simeq 1$ w bardzo dobrym przybliżeniu), ale może jednak nie musi być ściśle zerowa (tzn. może $q \neq 1$). Sygnaturą doświadczalną tej deformacji byłoby pewne (bardzo małe) odchylenie energii E_n oscylatora przy bardzo dużych n od liniowej zależności od n danej wzorem (12). W szczególności, gdyby q było w przybliżeniu równe 1, ale mniejsze od 1, wystąpiłoby nowe, zdumiewające zjawisko nasycania energii oscylatora przy $n \rightarrow \infty$: $N_n \rightarrow (1-q)^{-1} < \infty$. Doświadczalnym oscylatorem mógłby być pojedynczy mod (czyli sposób drgania) pola elektromagnetycznego realizowany np. w laserze.

badane ciało, a doskonale czarne to znaczy tylko tyle, że pochłania światło o wszystkich długościach fali, czyli wszystkie kolory i nic nie odbija. Wyobraźmy sobie doświadczenie przeprowadzone w ciemnym pokoju. Podgrzewamy badane ciało i pilnie obserwujemy, co się dzieje. Na początku nic nie widzimy, pokój jest przecież ciemny. Po jakimś czasie zaczniemy odczuwać, że z miejsca, w którym jest badane ciało, bije, zrazu ledwie wyczuwalna, a potem wyraźna, fala ciepła. Oznacza to, że nasze zmysły rejestrują niewidoczne dla oka promieniowanie podczerwone. Przy dostatecznie wysokiej temperaturze zauważymy bardzo słabe ciemnoczerwone świecenie. W dalszym ciągu odczuwamy promieniowanie podczerwone, ale część wysyłanego promieniowania jest już w zakresie widzialnym dla oka. Dalsze podgrzewanie powoduje, że barwa świecenia zmienia się i staje się coraz bielsza, jaśniejsza. W czasach, gdy kuźnie były bardziej rozpowszechnione, można było obserwować to zjawisko w odwrotnej kolejności podczas pracy kowala. Kawałek żelaza stygnąc na kowadło najpierw świecił jaskrawo, potem ciemniał, czerwieńiał, aby wreszcie stać się kawałkiem ciemnego gorącego żelaza. Doświadczenie to wskazuje, że przy każdej temperaturze każde ciało, a więc i ciało doskonale czarne, wysyła promieniowanie o różnej długości fali. Jeżeli fala jest długa, mówimy o podczerwieni, jeżeli fala jest coraz krótsza, przechodzimy do barw niebieskich i fioletowych. Doświadczenie jest proste. Wystarczy podgrzać badane ciało i obserwować, jaka część energii promienistej wysyłana jest w postaci fali o określonej długości. Możemy nawet stwierdzić, jak zależy ten rozdział energii na fale o poszczególnej długości od temperatury, do której podgrzaliśmy ciało. Dotąd nie widać nic zaskakującego. Powszechnie znany jest pogląd, że świecenie ciała zależy od temperatury, do której jest ono podgrzane. Myślę, że w sposób nieuświadomiony zdawał sobie z tego sprawę i człowiek pierwotny od chwili, gdy opanował z korzyścią dla siebie ogień. Problem pojawi się wtedy, gdy zechcemy na podstawie naszej wiedzy z życia codziennego przewidzieć, jak zależy świecenie podgrzanego ciała od temperatury. Pod koniec dziewiętnastego wieku przeprowadzono bardzo staranne badania dotyczące promieniowania ciała podgrzanego. Ściśle mówimy: dotyczące promieniowania ciała doskonale czarnego. Pozostawmy na boku ścisłość, bo nam wystarczy mówić o badaniu

promieniowania podgrzanego ciała. Nierozwiązalny okazał się problem wyprowadzenia znalezionej doświadczalnie prawa promieniowania – prawa przesunięcia Wiena. Jest ono bardzo proste. Mówi tylko tyle, że iloczyn temperatury ciała i długości fali promieniowanej z największym natężeniem jest stały. Wszystkie klasyczne próby wyprowadzenia tej tak prostej zależności zakończyły się niepowodzeniem. Usiłowano wyprowadzić ten wzór posługując się tym, co wiadano dotychczas. W naszej terminologii możemy powiedzieć, że wyprowadzono go zgodnie ze zdrowym rozsądkiem. Tymczasem postępowanie zgodne ze zdrowym rozsądkiem prowadziło do wyniku bezsensownego. Wzór, jaki wyprowadzono, nie zgadzał się z doświadczeniem, a co gorsza, przewidywał, że ciało powinno wypromieniować przy każdej temperaturze nieskończoną energię – oczywisty bezsens. Tak więc w roku 1900 sytuacja wydawała się beznadziejna. Doświadczenie swoje, a teoria swoje i, co gorsza, nie wiadano, gdzie tkwi błąd. Opierano się przecież przy wyprowadzeniu na dobrze poznanych zasadach.

Przełom następuje 14 grudnia 1900 roku. Na posiedzeniu Niemieckiego Towarzystwa Fizycznego w Berlinie Max Planck przedstawił wyprowadzenie prawa promieniowania ciała doskonale czarnego. Był ze swego wyprowadzenia niezadowolony. Cóż z tego, że otrzymał poprawny wynik (to znaczy – zgodny z doświadczeniem), jeżeli musiał zrobić bezsensowne i, jak się wydawało, nieuzasadnione założenie. Założył mianowicie, że energia promienista pochłaniana lub wysyłana przez dowolne ciało może być pochłaniana lub wysyłana tylko porcjami. Im większa długość fali, tym mniejsza porcja energii, która może być wyemitowana lub pochłonięta. Pojawiło się pojęcie porcji energii, którą nazwano kwantem energii. Są to narodziny fizyki kwantowej. Sam Planck bardzo niechętnie patrzył na to odejście od fizyki klasycznej i po swym wielkim odkryciu przez wiele lat starał się wyjaśnić zjawisko promieniowania ciała doskonale czarnego na gruncie czysto klasycznym. Po bezowocnych wysiłkach stwierdził później, że mimo wszystko nie uważa, iż trud jego poszedł na marne, bo dzięki wielokrotnym niepowodzeniom przekonał się w końcu, że nie można znaleźć wyjaśnienia mieszczącego się całkowicie w ramach fizyki klasycznej.

Drgania plazmowe

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Plazma to, jak pamiętamy, układ zjonizowanych atomów, czyli dodatnio naładowanych jonów i obdarzonych ładunkami ujemnymi elektronów. W przypadku plazmy wodorowej mamy mieszaninę protonów i elektronów z pewną ilością atomów wodoru, które jednak nie wpływają istotnie na własności plazmy. A własności te są bardzo szczególne i z tego powodu plazma bywa nazywana czwartym stanem materii, po gazach, cieczach i ciałach stałych. Bodaj najbardziej typowym zjawiskiem plazmowym są drgania elektronów względem jonów, zwane drganiami bądź oscylacjami plazmowymi. Ponieważ najlżejszy jon – proton jest blisko 2000 razy cięższy od elektronu, więc możemy myśleć w tym przypadku o jonach jako cząstkach nieruchomych.

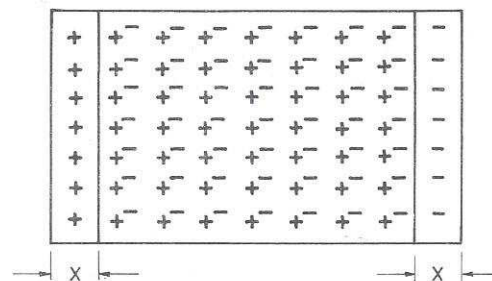
Wyobraźmy sobie prostopadłościenny, dla prostoty naszych rozważań, obszar zajmowany przez plazmę. Środek ciężkości elektronów został, na skutek jakiegoś zaburzenia, przesunięty względem środka ciężkości jonów o x . Przyjmijmy dalej, że gęstości elektronów ρ_e i jonów ρ_j są stałe w obszarach zajmowanych odpowiednio przez elektrony i jony. Ponieważ plazma jako całość jest elektrycznie neutralna, więc

$$Z\rho_e = \rho_j,$$

gdzie Z jest liczbą ładunkową jonu, tzn. Ze jest jego ładunkiem. Przesunięcie elektronów względem jonów sprawia, że pojawiają się nieneutralizowane ładunki (patrz rys.), a zatem powstaje pole elektryczne. Obliczmy, jakie to pole. Ponieważ ładunki odpowiedzialne za jego wytworzenie znajdują się tylko na brzegu obszaru, więc nasze zadanie jest identyczne z zadaniem o polu elektrycznym w prostopadłościennym kondensatorze. Zastosowawszy twierdzenie Gaussa znajdujemy pole (w układzie jednostek CGS)

$$E = 4\pi \frac{Q}{S} = 4\pi e \rho_e x,$$

gdzie Q jest całkowitym ładunkiem je wytwarzającym, a S przekrojem poprzecznym rozważanego obszaru.



Znając pole elektryczne możemy wyznaczyć ruch elektronów. Drugie prawo Newtona przyjmuje postać

$$(1) \quad Nm \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi N e^2 \rho_e x;$$

N oznacza liczbę elektronów, a m masę elektronu. Znak minus pojawia się po prawej stronie dlatego, że pole stara się przeciwdziałać rozsuwaniu ładunków dodatnich i ujemnych.

Równanie (1) można zapisać następująco

$$(2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_p^2 x,$$

gdzie wielkość $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \rho_e}{m}}$ zwana jest częstością plazmową.

Zależąc jedynie od gęstości i dwóch stałych ($e^2 = \frac{1}{137}$ i $m = 0,5 \text{ MeV}/c^2$) jest ω_p jednym z najważniejszych parametrów charakteryzujących plazmę.

Równanie (2) jest szczególnie lubianym przez fizyków równaniem oscylatora harmonicznego, którego rozwiązaniami są funkcje

$$(3) \quad x(t) = A \sin(\omega_p t + \varphi),$$

gdzie A jest amplitudą drgań, a φ fazą początkową. Widzimy więc, że wychylone względem jonów elektrony zaczynają oscylować i robią to bardzo szybko. Gęstość plazmy wytworzonej w urządzeniach mających doprowadzić do kontrolowanej syntezy termojądrowej waha się w granicach $10^{13} - 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, co daje częstotliwość drgań $\nu = 2\pi\omega_p$ rzędu $10^{11} - 10^{13} \text{ s}^{-1}$.

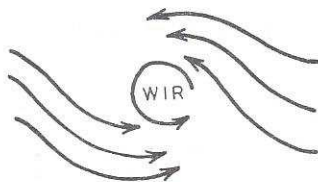
Na podstawie postaci rozwiązań (3) stwierdzilibyśmy, że raz wywołane drgania plazmowe nigdy nie zanikają. Jest to jednak wynik naszego bardzo uproszczonego opisu, który uwzględnia jedynie oddziaływanie elektronów z polem elektrycznym. Można natomiast oczekiwać, że przemieszczanie się elektronów względem jonów wywoła siłę podobną do siły tarcia, która będzie tłumić oscylacje plazmowe prowadząc do ich zaniku. Rzeczywiście, tak się często dzieje. Bywa jednak i tak, że wspomniana siła tarcia nie odgrywa poważnej roli, a amplituda drgań nie zanika z czasem, lecz narasta. Mamy wówczas do czynienia z tzw. niestabilnościami plazmowymi, które sprawiają, że zachowanie plazmy trudno przewidzieć, a jeszcze trudniej nad plazmą zapanować. Niestabilności plazmowe, o których opowiem następnym razem, są właśnie główną przeszkodą na drodze do kontrolowanej reakcji termojądrowej.

Koncepcja porcji energii odwrotnie proporcjonalnej do długości fali wymagała wprowadzenia stałej proporcjonalności. Planck wprowadził do fizyki nową stałą przyrody, nazwaną później stałą Plancka. Stała Plancka pomnożona przez częstość drgań odpowiadającą danej fali równa się energii kwantu. Wielkość liczbowa tej stałej jest bardzo mała i to właśnie tłumaczy, dlaczego na co dzień nie odczuwamy tego, że światło dociera do nas porcjami. Mówimy „załało nas światło”, a nie „spadł na nas deszcz kwantów”. A tak naprawdę światło to strumień kwantów energii promienistej. Tyle tylko, że są to bardzo małe porcje energii i zazwyczaj jest ich bardzo, bardzo dużo. Odkrycie kwantów promieniowania pozwoliło rozstrzygnąć iście salomonowo dawny spór między zwolennikami teorii falowej światła i zwolennikami teorii cząsteczkowej światła. Okazało się, że światło jest i falą, i strumieniem cząstek – kwantów, które nazywamy fotonami. W jakich doświadczeniach światło zachowuje się jak strumień cząsteczek, opowiem następnym razem. Okaze się, że ogromna fala nie może naruszyć nabrzeża, a potrafi to mała, byle dostatecznie krótka. Ale kamyczkiem nabrzeża będzie elektron, a nabrzeżem płytka metalowa.



Rozwiązanie zadania F 351.

Siła Coriolisa powoduje, że ruch ciała nie jest prostoliniowy. Na półkuli północnej ciała zbaczają w prawo, w wyniku czego pędzące na siebie strumienie powietrza (a tak jest w niżu) odchylają się jak na rysunku. Powoduje to powstawanie części wirów kręcących się w lewo.



Na półkuli południowej sytuacja jest odwrotna – wir niżowy będzie kręcił się w prawo.



Rozwiązanie zadania M 659.

Jeśli n jest parzyste i n razy wykonamy ruch opisany w treści zadania, za każdym razem nie poruszając innej filiżanki, to w efekcie każdą filiżankę odwrócimy $n - 1$ razy. Spowoduje to odwrócenie wszystkich filiżanek do góry dnem, gdyż $n - 1$ jest nieparzyste.

Niech teraz n będzie liczbą nieparzystą. Wyobraźmy sobie, że w każdej prawidłowo stojącej filiżance umieszczona jest liczba $+1$, w każdej zaś filiżance odwróconej dnem do góry – liczba -1 . Przed wykonaniem pierwszego ruchu iloczyn wszystkich liczb jest równy 1 . Każdy ruch zmienia położenie $(n - 1)$, czyli parzystej liczby filiżanek; oznacza to, że iloczyn liczb umieszczonych w filiżankach jest stale równy $+1$. Nie można więc odwrócić wszystkich filiżanek do góry dnem, bo wtedy iloczyn wszystkich liczb musiałby przybrać wartość -1 .



Rozwiązanie zadania M 660.

Ponieważ współczynnik wielomianu przy najwyższej potęgce jest równy 1 , więc iloczyn jego pierwiastków jest równy wyrazowi wolnemu, czyli 1 , ich suma zaś jest liczbą przeciwną do współczynnika przy x^{19} . Zatem, jeśli a_i (dla $i = 1, \dots, 20$) oznaczają pierwiastki wielomianu, to

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{20} &= 1 = \\ &= \frac{20}{20} = \\ &= \frac{20}{\sqrt[20]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{20}}}, \end{aligned}$$

czyli w nierówności (nieostrej) między średnią arytmetyczną a geometryczną zachodzi równość. Jak wiadomo, jest to możliwe jedynie wtedy, gdy dla wszystkich i mamy $a_i = 1$.