epsilon

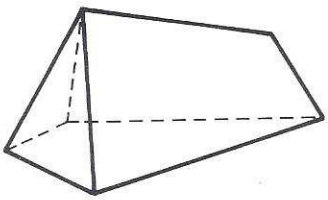
2/93
(24)

Matematyka na falach eteru

Polskie Radio organizuje od czasu do czasu w programie I konkurs: trzeba się do studia dodzwonić, gdy odpowiesz na kilka pytań, wygrasz pewną kwotę. Oto, co niedawno usłyszeliśmy:
PYT.: – Ile wynosi suma kątów w trójkącie?
ODP. (*radośnie*): – Trzy!
PYT.: – Ale, proszę pani, nam chodzi o... w stopniach...
ODP.: – Co proszę?

W grudniu zaproponowaliśmy Czytelnikom zadania świąteczne. Oto ich rozwiązania:

1. Pytaliśmy o liczbę przekątnych wielościanu:

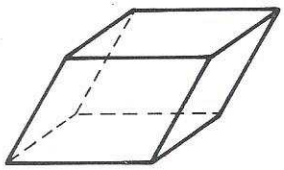


Otóż bliższa analiza rysunku wykazuje, że wielościan taki... nie istnieje! Czemu?

2. Prosiliśmy o wykazanie, że $\sin 1^\circ$ jest liczbą niewymierną. Dowód można poprowadzić nie wprost. Gdyby $\sin 1^\circ$ był liczbą wymierną, to wymierne byłyby też $\sin^2 1^\circ$ i $\cos^2 1^\circ$, a na mocy wzoru na cosinus kąta podwojonego również $\cos 2^\circ$ (więc i $\sin^2 2^\circ$), $\cos 4^\circ$, $\cos 8^\circ$, $\cos 16^\circ$ i $\cos 32^\circ$.
Ale wtedy liczbą wymierną byłaby liczba $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(= \cos 30^\circ = \cos(32^\circ - 2^\circ) = \cos 32^\circ \cos 2^\circ + \sin 32^\circ \sin 2^\circ$, jako że $\sin 32^\circ = 16 \cdot \cos 16^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \sin 2^\circ)$.

3. Należało udowodnić, że spełniona jest nierówność:
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$
Zauważmy, że nierówność ta równoważna jest następującej:
$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 99}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 \cdot 100} < \frac{1}{100}.$$
Ale $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$, zatem po lewej stronie mamy iloczyn $\frac{1}{100}$ i liczb mniejszych niż 1 $\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}, \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}, \ldots, \frac{97 \cdot 99}{98 \cdot 98} \text{ i } \frac{99}{100}\right)$.

4. Co jest częścią wspólną czworościanu foremnego i jego obrazu w symetrii środkowej względem środka wysokości czworościanu?
Szukaną bryłą jest równoległościan.



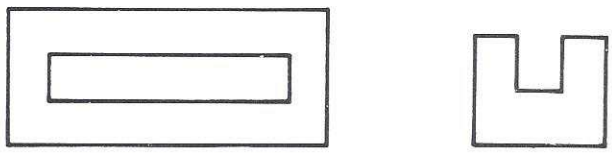
Łatwiej to sobie wyobrazić, ustawiając bryłę tak, że należący do tej bryły wierzchołek jednego z czworościanów jest jej lewym dolnym rogiem, drugiego zaś – prawym górnym. Warto przy tym zwrócić uwagę na dobrze znany fakt, że obrazem płaszczyzny i prostej w symetrii środkowej są odpowiednio płaszczyzna i prosta równoległe do wyjściowych.

5. Losowo włożono n listów do n kopert, p_i oznaczało prawdopodobieństwo tego, że dokładnie i listów trafiło do kopert właściwych. Należało wykazać, że $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \leq \frac{\ln \sqrt{\pi n}}{2\pi n!} \cdot e^{-\pi n}$, gdy $n \geq 100$.

Zauważmy, że lewa strona nierówności równa się zeru (gdyż $p_{n-1} = 0$; jeśli $n-1$ listów trafi do właściwych kopert, to i n-ty list też). Założenie, że $n \geq 100$, jak i przypomniany wzór Stirlinga do niczego się tu nie przydadzą.

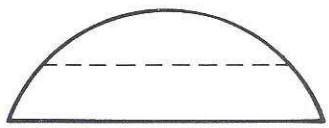
6. Całkowaliśmy przez części funkcję tangens i po kilku przekształceniach otrzymaliśmy wynik: $0 = 1$. W pewnym momencie pojawiła się tam równość: $\int \operatorname{tg} x dx = -1 + \int \operatorname{tg} x dx$. I tu zostało popełnione oszustwo; z równości tej wywnioskowaliśmy, że $0 = -1$, a przecież całki nieoznaczonej nie można traktować jako liczby, gdyż jest to rodzina funkcji (różniących się o stałą). Całkowanie przez części było natomiast poprawne.

7. Oto dwa rzuty pewnej bryły. Co to za bryła?



z góry z boku

Mogłoby się wydawać, że bryła taka nie istnieje. Nic podobnego! Jej trzeci rzut wygląda tak:



Można tę bryłę wykonać np. tnąc walec na dwa „półwalce", biorąc jedną z połówek i wycinając dłutem (równolegle do poprzedniego cięcia) kawałek bryły.

Ze względu na to, że od oddania tekstu do druku w *Delcie* do ukazania się numeru w sprzedaży mija kilka miesięcy, w tej chwili nie wiemy jeszcze, ile poprawnych odpowiedzi otrzymaliśmy. Listę nagrodzonych osób podamy wkrótce.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.