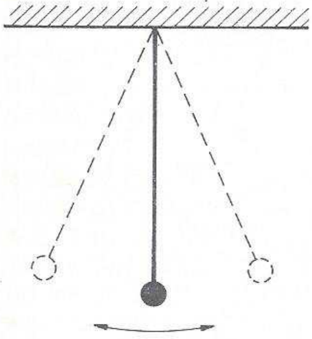
Dokładnie izochroniczne wahadło matematyczne

Stanisław BEDNAREK



Rys. 1

Zapewne wszyscy pamiętają wykonywane w szkole lub podczas zabawy doświadczenia z wahadłem matematycznym. Niewielki ciężarek zawieszony na lekkiej i nierozciągliwej nici po odchyleniu od kierunku pionowego i puszczeniu swobodnie wykonuje drgania (rys. 1). W szkole często mówi się, że jest to przykład drgań harmonicznych. Jeżeli ciało wykonuje drgania harmoniczne, to wypadkowa siła wprawiająca je w ruch, nazywana siłą kierującą $\vec{F}$, ma wartość wprost proporcjonalną do wychylenia i zwrócona jest zawsze do położenia równowagi. W przypadku wahadła matematycznego miarą tego wychylenia będzie kąt α zawarty między pionem a aktualnym kierunkiem nici. Wtedy wartość siły kierującej możemy wyrazić wzorem

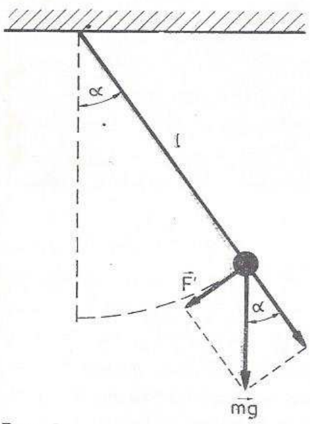
(1) $$F = -k\alpha\,,$$

w którym k oznacza współczynnik proporcjonalności.

Okres drgań T wahadła matematycznego, czyli czas, w którym powraca ono do tego samego skrajnego położenia, oblicza się ze znanego wzoru

(2) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

w którym l to długość wahadła, g zaś – wartość przyspieszenia ziemskiego w miejscu wykonywania eksperymentu.



Rys. 2

Jak wynika ze wzoru (2), okres drgań nie zależy od największego odchylenia wahadła od pionu, czyli od amplitudy drgań. Zgodnie z tym należy się spodziewać, że wahadło o danej długości odchylone od pionu potrzebuje tyle samo czasu na powrót do skrajnego położenia niezależnie od tego, czy kąt odchylenia będzie 6° czy 60°. Ta właściwość ruchu drgającego nazywa się izochronizmem (od greckich słów *isos* – równy, *chronos* – czas). Ma ona istotne znaczenie, gdy wykorzystujemy ruch drgający do pomiaru czasu. Przyjmując okres tego ruchu za jednostkę czasu nie musimy się martwić o amplitudę drgań.

Niestety, dokładne rozważania dowodzą, że wahadło matematyczne wykazuje właściwość izochroniczną tylko w przybliżeniu, zwłaszcza dla małych kątów odchylenia nie przekraczających kilku stopni. Dokładnie bowiem, zgodnie z rysunkiem 2, wartość siły kierującej wyraża się wzorem

(3) $$F' = -mg\sin\alpha\,,$$

w którym m oznacza masę wahadła. Jeśli α nie przekracza kilku stopni, to można skorzystać z przybliżenia

(4) $$\sin\alpha \approx \alpha\,.$$

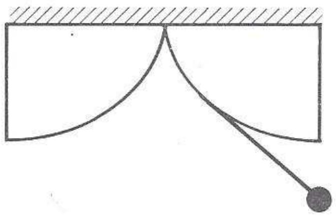
Wtedy wzór (3) przyjmuje postać wzoru (1), a rolę współczynnika k spełnia ciężar ciała mg.

W przypadku większych amplitud przybliżenia (4) zastosować nie można. Okres drgań wahadła matematycznego wyraża się wówczas pełnym wzorem

(5) $$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

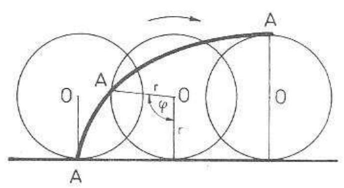
Łatwo zauważyć, że dla małych wartości α liczba $\sin\alpha$ jest dużo mniejsza od jedności i kolejne wyrazy szeregu występującego w nawiasie szybko maleją. Można więc pominąć te wartości jako znacznie mniejsze niż 1 i wzór (5) zastąpić przybliżonym wzorem (2).

Żeby sprawdzić słuszność powyższych wywodów, wystarczy wykonać proste doświadczenie. W tym celu budujemy wahadło matematyczne złożone z niewielkiego obciążnika, np. dużej nakrętki zawieszonej na cienkiej nici o długości kilkudziesięciu centymetrów. Wahadło to wprawiamy w drgania o małej amplitudzie odchylając je od pionu o kąt około 5° i za pomocą stopera lub zegarka z sekundnikiem mierzymy czas trwania np. 20 drgań. Pomiar ten powtarzamy kilkakrotnie. Obliczamy czas średni, który następnie dzielimy przez liczbę drgań i otrzymujemy okres. Te same czynności powtarzamy dla dużej amplitudy odchylając wahadło od pionu o kąt około 45°. Jaką różnicę zauważymy? Który okres jest dłuższy?



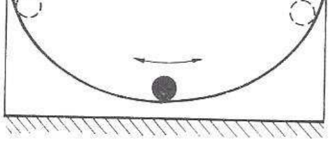
Rys. 3

Skoro okazało się, że najprostsze wahadło matematyczne wyraźnie nie jest izochroniczne dla dużych amplitud, powstaje problem, jak sporządzić wahadło mające tę własność? Pomocą ku temu może służyć wzór (5). Jeżeli okres drgań wzrasta ze wzrostem amplitudy α i długości l, to może by skracać l w miarę wzrostu α w taki sposób, aby okres pozostawał stały. Można to zrobić nawijając nić na krzywkę o odpowiednim kształcie (rys. 3). Dokładne obliczenia wykazują, że krzywka ta powinna mieć kształt odwróconej połówki cykloidy. Cykloida jest krzywą okresową zakreśloną przez dowolnie wybrany punkt A leżący na okręgu toczącym się bez poślizgu po linii prostej (rys. 4). Po cykloidach poruszają się więc względem obserwatora stojącego na Ziemi wszystkie punkty leżące na brzegu kół jadących bez poślizgu pojazdów. W przypadku naszego ściśle izochronicznego wahadła średnica okręgu, na którym leży punkt zakreślający cykloidę, powinna być równa połowie długości wahadła. Wtedy też długość łuku połówki tej cykloidy będzie równa długości wahadła. Po raz pierwszy wahadło takie zostało zaproponowane przez Huygensa, stąd też często nazywa się wahadłem cykloidalnym jego imienia.



Rys. 4

Następnym problemem jest zbudowanie modelu tego wahadła. W tym celu potrzebna będzie płytka ze styropianu albo kawałek miękkiej płyty pilśniowej lub sklejki, kilkadziesiąt szpilek albo gwoździków, kawałek kartonu i poprzednio sporządzone wahadło matematyczne. Na kartonie rysujemy okrąg o dość dużym promieniu, np. 10 czy 15 cm. Po wycięciu zaznaczamy na brzegu otrzymanego krążka punkt. Teraz przystępujemy do wykreślenia gałęzi cykloidy. Na płytce układamy linijkę i przykładamy do niej krążek tak, aby krawędź linijki przechodziła przez zaznaczony punkt. Przetaczamy bez poślizgu krążek po krawędzi linijki zaznaczając na płytce kolejne położenia wyróżnionego punktu – zgodnie z rysunkiem 4. Po wykonaniu przez krążek połowy obrotu i połączeniu zaznaczonych punktów otrzymujemy łuk cykloidy. Podobnie wykreślamy drugą, symetryczną gałąź cykloidy (porównaj rys. 3). Wzdłuż wykreślonych linii, co kilka milimetrów wbijamy szpilki lub gwoździki, między którymi można przepleść pasek kartonu o szerokości równej wysokości wystających części szpilek lub gwoździków. W miejscu, gdzie łuki cykloidy zbiegają się, wbijamy gwoździk i zawieszamy na nim wahadło matematyczne. Jego długość powinna być dwa razy większa od średnicy krążka użytego do wykreślania łuków cykloidy. Tak przygotowaną płytkę z wahadłem zawieszamy w płaszczyźnie pionowej na dwóch gwoździkach. Teraz możemy przystąpić do badania izochronizmu naszego wahadła cykloidalnego. W tym celu powtarzamy w poprzednio opisany sposób pomiary okresu. Wykonujemy je dla coraz to większych amplitud zaczynając np. od około 10° i przy każdym następnym pomiarze zwiększając amplitudę o kolejne 10°. Dla każdej z amplitud obliczamy średni okres z kilku pomiarów i porównujemy otrzymane wartości. Jaki wniosek możemy stąd wyciągnąć? I na koniec jeszcze jeden problem. Jaka linia jest torem, po którym porusza się obciążnik naszego wahadła cykloidalnego konstrukcji Huygensa? Jaką zaletę ma to wahadło w porównaniu z innym wahadłem cykloidalnym sporządzonym z kuleczki staczającej się po rynience w kształcie odwróconej cykloidy (rys. 5)?



Rys. 5