Czy natura oscylatora harmonicznego nie jest bardziej skomplikowana niż przypuszczaliśmy?

Wojciech KRÓLIKOWSKI

Wśród prostych układów dynamicznych jednym z najbardziej podstawowych teoretycznie, a jednocześnie najpopularniejszych w zastosowaniach fizycznych i technicznych, jest jednowymiarowy oscylator harmoniczny. Wystarczy wspomnieć, że wszechobecne w naszym życiu codziennym pole elektromagnetyczne można uważać z dynamicznego punktu widzenia za pewien (nieskończony) zbiór takich oscylatorów.

W mechanice klasycznej ruch jednowymiarowego oscylatora harmonicznego opisujemy równaniem Newtona

(1) $$m\ddot{x} = -m\omega^2 x\,,$$

gdzie $\ddot{x}$ jest drugą pochodną względem czasu t współrzędnej x określającej wychylenie oscylatora z położenia równowagi $x = 0$, m zaś i ω oznaczają masę i częstość (kołową) oscylatora. Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego drugiego rzędu (1) ma postać drgania harmonicznego o częstości ω:

(2) $$x = A\sin(\omega t + f)\,,$$

przy czym dwie stałe dowolne, A i f, są amplitudą i przesunięciem fazy tego drgania (można je wyznaczyć z warunków początkowych w pewnej chwili $t = t_0$: $x(t_0) = x_0$ i $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, gdzie x_0 i $\dot{x}_0$ są danymi stałymi). Energię jednowymiarowego oscylatora harmonicznego określa wzór

(3) $$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2)\,,$$

gdzie $p = m\dot{x}$ przedstawia pęd oscylatora. Ze związków (2) i (3) otrzymujemy wartość energii oscylatora:

(4) $$H = E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\,.$$

Gdy od mechaniki klasycznej przechodzimy do mechaniki kwantowej, rolę współrzędnej x i pędu p przejmują pewne macierze kwadratowe (o nieskończonej liczbie wierszy i kolumn). Oznaczmy je przez $\hat{x}$ i $\hat{p}$. Jak wiadomo (przynajmniej niektórym z Czytelników, obeznanym nieco bliżej z pojęciem macierzy), mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne w odróżnieniu od mnożenia liczb (rzeczywistych i zespolonych). Można się więc spodziewać, że $\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$. Rzeczywiście, podstawowym prawem mechaniki kwantowej jest relacja nieprzemienności Heisenberga

(5) $$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar\,,$$

gdzie $\hbar$ oznacza stałą Plancka dzieloną przez 2π o wartości doświadczalnej $1{,}05457266 \times 10^{-34}$ J$\cdot$s (zauważmy, że gdyby $\hbar$ było równe 0, wielkości fizyczne $\hat{x}$ i $\hat{p}$ stałyby się przemienne, a wtedy wrócilibyśmy do mechaniki klasycznej). Dla porządku dodajmy, że po prawej stronie relacji (5) przy $\hbar$ występuje domyślnie macierz jednostkowa $\hat{1}$ (tzn. macierz o samych jedynkach na przekątnej głównej), której zwykle nie wypisujemy. W konsekwencji macierzowego charakteru $\hat{x}$ i $\hat{p}$ rolę energii H danej wzorem (3)

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (V)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Gorąca woda zamarznie szybciej niż zimna

Tomasz HOFMOKL

W tym cyklu wykładów opowiadam Państwu o doświadczeniach, których wynik jest na tyle zaskakujący, że zdaje się przeczyć zdrowemu rozsądkowi. Na podstawie wiedzy nabytej i uogólnień doświadczeń życia codziennego wyrabiamy sobie kryteria tego, co jest możliwe, a co nie powinno żadną miarą się zdarzyć. Zakres naszych doświadczeń jest na ogół ograniczony i dlatego trudno się spodziewać, aby nasz zdrowy rozsądek mógł być arbitrem we wszystkich sytuacjach, zdarzających się w przyrodzie. Warto to sobie uświadomić; uczy to nas z jednej strony podziwu dla bogactwa otaczającego nas świata, a z drugiej sugeruje większą pokorę przy ocenie własnych możliwości osądu, co jest możliwe, a co nie.

Dziś zacznę moją pogawędkę od bardzo prostego zjawiska, a skończę na nieco trudniejszym. Oba zjawiska łączy proces oddawania do otoczenia ciepła. Historię można by zacząć dowolnie dawno. Ludzie mieszkający w krajach o zimnym klimacie zauważyli, że woda zimna zamarza na mrozie wolniej niż woda podgrzana. Uważano, że poidełka dla ptaków lepiej napełniać zimną wodą, a w nowszych czasach, że lepiej myć samochód zimną wodą, jeżeli jest on narażany na działanie mrozu. Były to poglądy na granicy przesądu do czasu, gdy zjawisko to zaczęto badać systematycznie.

Zaczęło się wszystko na zajęciach w szkole wyższej w Tanzanii. Jednym z zadań dla studentów było sporządzenie lodów, zwykłych jadalnych lodów. Instrukcja, a ściślej mówiąc, receptura, nakazywała podgrzanie mleka, zmieszanie go z cukrem, ostudzenie mieszaniny do temperatury pokojowej, a następnie zamrożenie w elektrycznym zamrażalniku. Wśród studentów, którzy przyrządzali lody był Erasto Mpemba. Tego dnia on i jego kolega z jakiegoś powodu bardzo się spieszyli. Erasto nie miał cierpliwości poczekać, aż mieszanina ostygnie do temperatury pokojowej, a jego kolega nie zatroszczył się nawet o podgrzanie swojej porcji. Obaj włożyli przygotowane porcje równocześnie do zamrażalnika. Porcja Erasto była ciepła, może nawet gorąca, a porcja kolegi chłodna. Ku wielkiemu zdumieniu Mpemba stwierdził, że to jego, początkowo gorąca, mieszanka zamarzła znacznie wcześniej niż mieszanka chłodna. Sprawa nabrała rozgłosu, gdy Mpemba wraz z D.G. Osbornem z University College Dar es Salaam opublikowali sprawozdanie w czasopiśmie *Physics Education*. Przez pewien okres czasopismo otrzymywało wiele listów ze stwierdzeniami, że efekt jest fałszywy, spowodowany jakimś błędem lub wprost przeciwnie, że zjawisko to jest dobrze znane. Dziś wiemy, że zjawisko to jest rzeczywiste, ale do końca nie znamy pełnego wyjaśnienia. Szereg czynników może być odpowiedzialnych za jego przebieg. W ciepłym płynie może być lepszy przepływ niż w zimnym i w związku z tym lepsza wymiana ciepła z otoczeniem. Wiadomo również, że w ciepłym płynie jest mniej rozpuszczonego gazu (powietrza) niż w zimnym. Rozpuszczony gaz spowalnia stygnięcie. Wiadomo, że rury z ciepłą wodą w domowej instalacji zamarzają w czasie awarii niekiedy wcześniej niż rury z zimną wodą, którą chroni rozpuszczone powietrze. Może jakąś rolę odgrywa fakt, że ciepły płyn szybciej paruje niż zimny i w rezultacie, nawet jeżeli na początku ilości płynu były jednakowe, to zamarza mniej płynu z ciepłego naczynia niż zimnego, bo część z ciepłego zdążyła wyparować. Nie chcę Państwu niczego sugerować, sam nie jestem pewny, co jest najważniejszym czynnikiem wywołującym wspomniany efekt. Proponuję natomiast wykonanie tego doświadczenia z użyciem małych pojemników na wodę i domowej zamrażarki.

Tak jak obiecałem, przejdę teraz do drugiego zjawiska, które określiłem jako trudniejsze. Uświadomiłem sobie, że tak naprawdę to jest ono nawet prostsze niż studzenie mleka z cukrem. Trudniejsze jest tylko zauważenie, że w jego przebiegu jest coś, co nie zgadza się ze zdrowym rozsądkiem. Cofnijmy się do początków naszego stulecia i zajmijmy się nie rozwiązanym w tym czasie problemem, jakim było promieniowanie ciała doskonale czarnego. Niech nikogo nie zniechęca określenie ciało doskonale czarne. To tylko uproszczenie zagadnienia, bo wtedy nie musimy definiować, jakiego koloru jest

przejmuje w mechanice kwantowej macierz

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2)\,. \tag{6}$$

Ogólniej, w mechanice kwantowej macierze kwadratowe (zwykle o nieskończonej liczbie wierszy i kolumn) opisują wielkości fizyczne. Prosimy Czytelnika o potraktowanie tego stwierdzenia jako wstępnej informacji, która, być może, zachęci Go do samodzielnej próby zapoznania się z elementami mechaniki kwantowej (w tym celu można by polecić podręcznik przeznaczony dla początkujących studentów uniwersytetu: E. H. Wichmann, *Fizyka kwantowa*, PWN, Warszawa 1973). Tutaj ograniczymy się do pewnej uwagi wskazującej na podstawową przyczynę sprawiającą, że właśnie macierze są odpowiednie do opisu wielkości fizycznych w świecie atomowym rządzonym prawami mechaniki kwantowej. Otóż, można ogólnie powiedzieć, że fizyka, badając pewien układ (fizyczny), rozważa zmiany jego stanu, a więc przejścia układu między różnymi parami jego stanów. W odróżnieniu od naszego makroświata, w świecie atomowym pomiar każdej wielkości fizycznej (nawet „maksymalnie subtelny") powoduje (na ogół) zaburzenie stanu układu prowadzące do przejść między różnymi parami jego stanów. Stąd wszystkie możliwe pary stanów układu powinny być jakoś zakodowane w opisie wielkości fizycznych określonych dla tego układu. Właśnie tym różnym parom stanów odpowiadają różne elementy macierzy kwadratowych opisujących wielkości fizyczne w mechanice kwantowej.

Jawny kształt macierzy energii (6) łatwiej można znaleźć operując zamiast $\hat{x}$ i $\hat{p}$ macierzami określonymi przez wzory

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right), \\ \hat{a}^* &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Wtedy prosty rachunek pokazuje, że relacja nieprzemienności (5) sprowadza się do postaci

$$\hat{a}\hat{a}^* - \hat{a}^*\hat{a} = 1\,, \tag{8}$$

macierz energii (6) zaś – do postaci

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^*\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^*)\hbar\omega\,. \tag{9}$$

Nietrudno się przekonać wykonując mnożenie macierzy według reguły „wiersze przez kolumny", tzn. $\hat{A}\hat{B} = \|C_{kl}\|$, gdzie $C_{kl} = \sum_m A_{km}B_{ml}$, że relację nieprzemienności (8) można spełnić za pomocą macierzy

$$\hat{a} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{Vmatrix}, \qquad \hat{a}^* = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

przy czym wtedy macierz energii (9) przyjmuje kształt

$$\hat{H} = \begin{Vmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & E_2 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & E_3 & . \\ . & . & . & . & . \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

gdzie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{12}$$

Podstawowym prawem interpretacyjnym mechaniki kwantowej jest stwierdzenie, że jeśli macierz opisująca pewną wielkość fizyczną, np. energię, ma postać diagonalną (tzn. zawiera wyrazy niezerowe jedynie na przekątnej głównej), wtedy liczby (rzeczywiste) występujące na przekątnej głównej przedstawiają możliwe wartości tej wielkości fizycznej (możliwe wyniki jej pomiarów). A zatem, z postaci (11) macierzy $\hat{H}$ wynika, że wartości energii jednowymiarowego oscylatora harmonicznego w mechanice kwantowej są dane wzorem (12) (są więc nieciągłe, „skwantowane").

Zauważmy teraz, że stosując analogiczną metodę algebraiczną można rozwiązać pewną „zdeformowaną" relację nieprzemienności, postaci wykraczającej poza mechanikę kwantową oscylatora harmonicznego, mianowicie relację

$$\hat{a}\hat{a}^* - q\hat{a}^*\hat{a} = 1\,, \tag{13}$$

gdzie $q > 0$ jest nowym parametrem, w ogólności różnym od 1 (zauważmy, że dla $q \to 1$ wracamy do mechaniki kwantowej). Rzeczywiście, relację tę można spełnić za pomocą macierzy

$$\hat{a} = \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{N_1} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{N_2} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N_3} & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

$$\hat{a}^* = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \sqrt{N_1} & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \sqrt{N_2} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{N_3} & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{Vmatrix},$$

gdzie liczby

$$N_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{15}$$

są powiązane wzorem rekurencyjnym

$$N_{n+1} = qN_n + 1\,, \tag{16}$$

przy czym $N_0 = 0$. Wtedy macierz energii (9) uzyskuje postać (11), gdzie jednak zamiast wzoru (12) pojawia się nowy wzór

$$E_n = \left(\frac{q+1}{2}N_n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{17}$$

Dla $q \to 1$ wracamy do dawnego wzoru (12).

Logiczną atrakcyjność rozważań nad „zdeformowaną" relacją nieprzemienności (13) można uzasadnić następująco. Relacja nieprzemienności (8) występująca w mechanice kwantowej oscylatora harmonicznego jest najprostszą realizacją nieprzemienności $\hat{a}\hat{a}^* \neq \hat{a}^*\hat{a}$ macierzy $\hat{a}$ i $\hat{a}^*$. Można postawić pytanie, czy nie występują dla fizycznych oscylatorów pewne odchylenia od tej realizacji (naturalnie, jeśli takie odchylenia rzeczywiście występują, to muszą być znikome, bo, jak dotąd, mechanika kwantowa jest zgodna w swych przewidywaniach ze wszystkimi doświadczeniami). W tej sytuacji ogólna liniowa realizacja nieprzemienności postaci $\hat{a}\hat{a}^* = q\hat{a}^*\hat{a} + r$, gdzie $q \simeq 1$ oraz $r \simeq 1$, jest szczególnie interesująca (przez normalizację $\hat{a}$ i $\hat{a}^*$ można zawsze osiągnąć, aby r było równe dokładnie 1, a wtedy otrzymujemy relację (13)).

Ze względu na swą postać przekraczającą ramy mechaniki kwantowej oscylatora harmonicznego teoria „zdeformowanego algebraicznie" oscylatora harmonicznego wzbudza od paru lat znaczne zainteresowanie wśród fizyków-teoretyków, a zwłaszcza wśród matematyków. Ponieważ jednak nie obserwuje się, jak dotąd, żadnych odchyleń doświadczalnych od przewidywań mechaniki kwantowej, deformacja realnych oscylatorów harmonicznych występujących w przyrodzie (jeśli w ogóle ma miejsce) musi być znikoma (tzn. musi być $q \simeq 1$ w bardzo dobrym przybliżeniu), ale może jednak nie musi być ściśle zerowa (tzn. może $q \neq 1$). Sygnaturą doświadczalną tej deformacji byłoby pewne (bardzo małe) odchylenie energii E_n oscylatora przy bardzo dużych n od liniowej zależności od n danej wzorem (12). W szczególności, gdyby q było w przybliżeniu równe 1, ale mniejsze od 1, wystąpiłoby nowe, zdumiewające zjawisko nasycania energii oscylatora przy $n \to \infty$: $N_n \to (1-q)^{-1} < \infty$. Doświadczalnym oscylatorem mógłby być pojedynczy mod (czyli sposób drgania) pola elektromagnetycznego realizowany np. w laserze.

badane ciało, a doskonale czarne to znaczy tylko tyle, że pochłania światło o wszystkich długościach fali, czyli wszystkie kolory i nic nie odbija. Wyobraźmy sobie doświadczenie przeprowadzone w ciemnym pokoju. Podgrzewamy badane ciało i pilnie obserwujemy, co się dzieje. Na początku nic nie widzimy, pokój jest przecież ciemny. Po jakimś czasie zaczniemy odczuwać, że z miejsca, w którym jest badane ciało, bije, zrazu ledwie wyczuwalna, a potem wyraźna, fala ciepła. Oznacza to, że nasze zmysły rejestrują niewidoczne dla oka promieniowanie podczerwone. Przy dostatecznie wysokiej temperaturze zauważymy bardzo słabe ciemnoczerwone świecenie. W dalszym ciągu odczuwamy promieniowanie podczerwone, ale część wysyłanego promieniowania jest już w zakresie widzialnym dla oka. Dalsze podgrzewanie powoduje, że barwa świecenia zmienia się i staje się coraz bielsza, jaśniejsza. W czasach, gdy kuźnie były bardziej rozpowszechnione, można było obserwować to zjawisko w odwrotnej kolejności podczas pracy kowala. Kawałek żelaza stygnąc na kowadle najpierw świecił jaskrawo, potem ciemniał, czerwieniał, aby wreszcie stać się kawałkiem ciemnego gorącego żelaza. Doświadczenie to wskazuje, że przy każdej temperaturze każde ciało, a więc i ciało doskonale czarne, wysyła promieniowanie o różnej długości fali. Jeżeli fala jest długa, mówimy o podczerwieni, jeżeli fala jest coraz krótsza, przechodzimy do barw niebieskich i fioletowych. Doświadczenie jest proste. Wystarczy podgrzać badane ciało i obserwować, jaka część energii promienistej wysyłana jest w postaci fali o określonej długości. Możemy nawet stwierdzić, jak zależy ten rozdział energii na fale o poszczególnej długości od temperatury, do której podgrzaliśmy ciało. Dotąd nie widać nic zaskakującego. Powszechnie znany jest pogląd, że świecenie ciała zależy od temperatury, do której jest ono podgrzane. Myślę, że w sposób nieuświadomiony zdawał sobie z tego sprawę i człowiek pierwotny od chwili, gdy opanował z korzyścią dla siebie ogień. Problem pojawi się wtedy, gdy zechcemy na podstawie naszej wiedzy z życia codziennego przewidzieć, jak zależy świecenie podgrzanego ciała od temperatury. Pod koniec dziewiętnastego wieku przeprowadzono bardzo staranne badania dotyczące promieniowania ciała podgrzanego. Ściśle mówimy: dotyczące promieniowania ciała doskonale czarnego. Pozostawmy na boku ścisłość, bo nam wystarczy mówić o badaniu