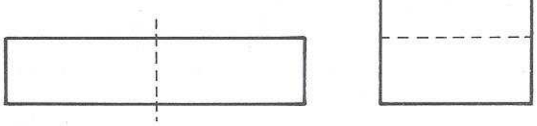
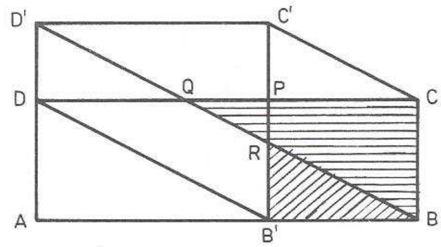
mała delta

Klocki

Jeśli dwa prostokąty mają jednakowe pola, to można jeden z nich pociąć na skończoną liczbę wielokątnych kawałków, z których da się ułożyć drugi. Krok pierwszy (często niepotrzebny) to doprowadzenie do sytuacji, gdy stosunek ich dłuższych boków jest mniejszy niż 2 – robi się to przecinając zbyt długi prostokąt na pół (i składając – rys. 1). Krok zasadniczy opiera się na sprawdzeniu, że jeśli prostokąty $ABCD$ i $AB'C'D'$ mają jednakowe pola i leżą tak jak na rysunku 2, to $DB' \parallel D'B \parallel CC'$.



Rys. 1



Rys. 2

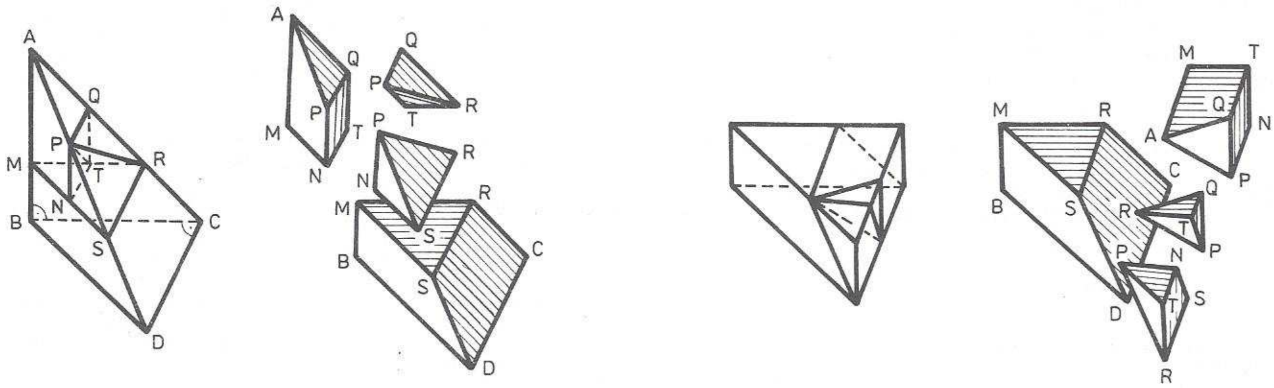
Wynika to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa. Skoro bowiem $AD \cdot AB = AD' \cdot AB'$, to $\frac{AD}{AB'} = \frac{AD'}{AB}$, a więc $DB' \parallel D'B$ (patrzyliśmy na kąt o wierzchołku A). Z tejże równości wynika, że $AD \cdot AB - AD \cdot AB' = AD' \cdot AB' - AD \cdot AB'$, czyli $AD \cdot BB' = DD' \cdot AB'$, albo $\frac{AD}{AB'} = \frac{DD'}{BB'}$.

Zapisując tę równość za pomocą innych odcinków mamy $\frac{B'P}{DP} = \frac{C'P}{CP}$, a więc $DB' \parallel CC'$ (patrzyliśmy tym razem na kąt o wierzchołku P).

Skoro tak, to odcinając trójkąty $BB'R$ i BCQ oraz przesuwając pierwszy o wektor $\overrightarrow{B'D}$, a drugi o wektor $\overrightarrow{CC'}$ otrzymujemy z prostokąta $ABCD$ prostokąt $AB'C'D'$.

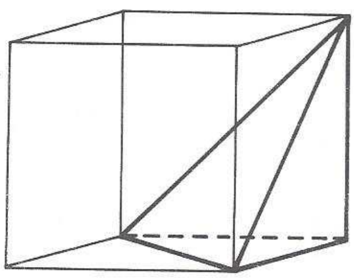
Uzyskany rezultat pozwala stwierdzić, że każdy prostopadłościan można pociąć na klocki wielościenne, z których da się ułożyć sześcian. Niech bowiem wyjściowy prostopadłościan ma krawędzie a, b i c. Metodą zastosowaną dla prostokąta można z niego zrobić prostopadłościan o krawędziach $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$, $\frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}$ i c – po prostu tniemy zawsze płaszczyznami równoległymi do krawędzi o długościach c. I dalej tak samo: tniemy równolegle do krawędzi o długościach $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ w ten sposób, by prostokąt $\frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}} \times c$ zamienił się na kwadrat (o boku $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$). I koniec.

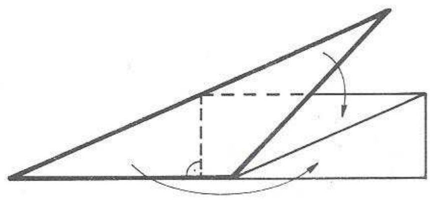
Powstaje pytanie, czy każdy wielościan można tak pociąć na wielościenne klocki, by dało się ułożyć z nich sześcian. Okazuje się, że nie – udowodnił to Dehn w 1900 roku. Niektóre jednak wielościany można. Na rysunku 3 pokazany jest jeden z tzw. czworościanów Hilla oraz sposób jego pocięcia na cztery klocki, z których składa się graniastosłup o podstawie trójkątnej – w czworościanie tym krawędzie AB, BC i CD są równe i mają trzy wzajemnie prostopadłe kierunki; pocięcie zrobione zostało tak, że $BM = MN = \frac{1}{3}AB$ – resztę widać.



Rys. 3

Ale gdzie jest obiecany sześcian? Co robić dalej, poucza nas rysunek 4, który wskazuje, jak trójkąt przez pocięcie zamienia się na równoległobok, a ten na prostokąt – w ten sposób nasz graniastosłup zamienić można na prostopadłościan – prawda? A co zrobić z prostopadłościanem, już wiemy.





Rys. 4

Na koniec przykład czworościanu, którego nie można pociąć na wielościenne klocki, z których dałoby się ułożyć sześcian – rysunek 5. Bardzo podobny do czworościanu Hilla, nieprawdaż?

Rys. 5. Tym, którzy chcą wiedzieć, dlaczego się nie da, polecamy *Deltę* 11/1984.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS