Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1993

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 239 (WT=2,40) i 240 (WT=1,43) z numeru 4/1992

Marek Prauza	– Poraj	42,43
Mikołaj Rotkiewicz	– Warszawa	40,17
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	35,52
Marcin Kasperski	– Warszawa	35,28

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Zadania z matematyki nr 253, 254

253. Dane są liczby całkowite $a \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 3$, przy czym m jest dzielnikiem liczby $a^{2^k} + 1$. Dowieść, że $m > 2^{k+1}$.

254. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie

$$f(x+y) = f(x)f(y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \qquad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Zadanie **254** zaproponował pan Henryk Kornacki z Augustowa.

Rozwiązanie zadania M 657.
Zauważmy, że

$$f(x) = x \cdot g(x) + f(0) = x \cdot g(x) + p,$$

czyli

$$a = f(a) = a \cdot g(a) + p.$$

Stąd wynika, że liczba pierwsza p dzieli się bez reszty przez a, zatem, zgodnie z warunkiem $p > a$, mamy $a = 1$.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1992

Przypominamy treść zadań:

245. Dla dowolnego zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ złożonego z siedmiu różnych punktów płaszczyzny oznaczmy przez $\alpha(H)$ miarę największego kąta wypukłego $\sphericalangle P_iP_jP_k$ ($i, j, k \in \{1, \ldots, 7\}$). Obliczyć kres dolny wartości $\alpha(H)$, gdy H przebiega rodzinę wszystkich siedmiopunktowych podzbiorów płaszczyzny.

246. Wyznaczyć w zależności od stałych rzeczywistych a, b liczbę różnych pierwiastków rzeczywistych równania

$$x^4 - 2ax^2 + b^3x + a(a - b^3) = 0.$$

245. Wykażemy, że dla każdego zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ zachodzi nierówność $\alpha(H) \geq 120°$. Jeśli punkty $P_1, \ldots, P_7$ są wierzchołkami siedmiokąta wypukłego, to maksymalny kąt wewnętrzny ma miarę nie mniejszą niż 1/7 sumy miar wszystkich kątów wewnętrznych. Suma ta wynosi $5 \cdot 180°$, więc w tym przypadku $\alpha(H) \geq (5/7) \cdot 180° > 120°$. Jeśli punkty $P_1, \ldots, P_7$ nie są wierzchołkami siedmiokąta wypukłego, to pewne k punktów ($3 \leq k \leq 6$) są wierzchołkami k-kąta wypukłego, zawierającego pozostałe $7-k$ punktów w swoim wnętrzu. Dzielimy ten k-kąt na trójkąty przekątnymi wychodzącymi z jednego wierzchołka. W którymś z otrzymanych trójkątów (wewnątrz lub na brzegu) znajdzie się pewien punkt P_j; jeden z boków tego trójkąta jest widoczny z punktu P_j pod kątem $\geq 120°$. Zatem i w tym przypadku $\alpha(H) \geq 120°$. (Prowadząc nieco staranniejszą analizę można wykazać, że zawsze zachodzi ostra nierówność $\alpha(H) > 120°$.) Rozważmy teraz taką konfigurację: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ jest sześciokątem wypukłym o wszystkich kątach wewnętrznych równych 120° i takim, że $|P_1P_2| = |P_3P_4| = |P_5P_6| = a$, $|P_2P_3| = |P_4P_5| = |P_6P_1| = b < a$; punkt P_7 leży na przecięciu osi symetrii sześciokąta. Dla zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ miara $\alpha(H) = |\sphericalangle P_1P_7P_4| = |\sphericalangle P_2P_7P_5| = |\sphericalangle P_3P_7P_6|$ będzie dowolnie bliska 120°, jeśli stosunek a/b będzie dostatecznie duży. Stąd wynika, że szukany kres dolny wynosi 120°.

246. Dany wielomian jest iloczynem trójmianów kwadratowych

$$P(x) = x^2 + bx - a \qquad \text{i} \qquad Q(x) = x^2 - bx + b^2 - a$$

o wyróżnikach

$$(1) \qquad \Delta_P = 4a + b^2, \qquad \Delta_Q = 4a - 3b^2;$$

znaki wyrażeń (1) determinują liczbę pierwiastków rzeczywistych każdego z tych trójmianów. Przypuśćmy teraz, że P i Q mają wspólny pierwiastek x_0. Wówczas $x_0^2 + bx_0 = a$, $x_0^2 - bx_0 = a - b^2$, skąd przez odjęcie oraz dodanie stronami:

$$2bx_0 = b^2, \qquad 2x_0^2 = 2a - b^2.$$

Dostajemy alternatywę

$$(2) \qquad (b = 0,\ a = x_0^2 \geq 0) \quad \text{lub} \quad (x_0 = b/2,\ 4a = 3b^2).$$

W przypadku, gdy parametry a i b nie spełniają żadnego ze związków figurujących w (2), odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie wynika wprost z analizy znaków wyrażeń (1). Gdy natomiast liczby a, b spełniają pierwszy lub drugi związek (2), równanie przybiera odpowiednio postać

$$(x^2 - a)^2 = 0 \quad \text{lub} \quad \big((x + (b/2))^2 - b^2\big)(x - (b/2))^2 = 0.$$

W każdym przypadku dalsza analiza jest oczywista.

Reasumując, uzyskujemy odpowiedź: liczba różnych pierwiastków rzeczywistych równania $P(x)Q(x) = 0$ wynosi:

$$\begin{cases} 4 & \text{gdy } 4a > 3b^2 > 0, \\ 2 & \text{gdy } -b^2 < 4a \leq 3b^2 \text{ lub } b = 0 < a, \\ 1 & \text{gdy } 4a + b^2 = 0, \\ 0 & \text{gdy } 4a + b^2 < 0. \end{cases}$$

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 137 (WT=3,33) i 138 (WT=2,50) z numeru 4/1992

Paweł Perkowski	– Szczecin	41,86
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,47
Przemysław Gworys	– Częstochowa	21,48
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	19,01
Dariusz Wilk	– Rzeszów	17,76

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Zadania z fizyki nr 151, 152

151. W obwodzie LC (bez oporu) występują drgania elektromagnetyczne. Czy można zwiększyć ich amplitudę:
a) zbliżając i oddalając w odpowiednich momentach okładki kondensatora?
b) wsuwając między okładki i wysuwając płytkę z dielektryka?
c) zbliżając i oddalając zwoje cewki?
d) wsuwając do wnętrza cewki i wysuwając magnes stały?
Jeśli tak, to w jakich momentach trzeba wykonywać opisane wyżej ruchy, aby wzrost amplitudy był największy?

152. Przednia i tylna oś motocykla są odległe o $d = 1{,}4$ m, promień kół wynosi $r = 0{,}4$ m, a współczynnik tarcia opon o jezdnię jest równy $f = 1$. Środek masy motocykla wraz z motocyklistą znajduje się w jednakowej odległości od obu osi na wysokości $h = 0{,}8$ m nad ziemią. Obliczyć minimalną drogę hamowania motocykla jadącego z prędkością początkową $v = 60$ km/h, jeśli
a) używać tylko tylnego hamulca,
b) używać tylko przedniego hamulca,
c) używać obu hamulców.
Masę kół pominąć. Przedyskutować optymalną (i bezpieczną!) metodę użycia hamulców, w zależności od wartości danych.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1992

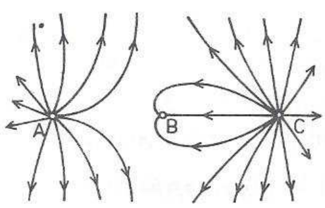
Przypominamy treść zadań:

143. W dużym zbiorniku z wodą na dużej głębokości wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczono końcówki trzech rurek doprowadzających lub odprowadzających wodę. Wydajność źródła A wynosi $+1$, a wydajność źródła C wynosi $+2$. Jaka jest maksymalna wartość poboru wody przez rurkę B, przy której czerpana woda będzie w całości pochodzić z C, bez domieszki z A? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny i laminarny.

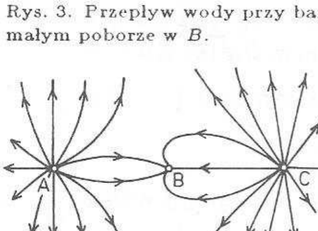
144. Kołysząc się na huśtawce dziecko może:
1. siedząc wysuwać nogi do przodu odchylając jednocześnie do tyłu górną część ciała, lub na odwrót – podkurczać nogi i pochylać tułów do przodu (rys. 1).
2. stojąc przykucać (rys. 2) lub podnosić się do góry.
W których momentach dziecko powinno wykonywać opisane wyżej ruchy, aby rozkołysać się mocniej? Czy ruchy te mogą wzbudzić kołysanie, gdy huśtawka początkowo spoczywała, czy tylko zwiększyć amplitudę wahań pchniętej huśtawki?

Rys. 1

Rys. 2



Rys. 3. Przepływ wody przy bardzo małym poborze w B.



Rys. 4. Przepływ wody przy większym poborze w B.

143. Prawa przepływu cieczy mają identyczną postać matematyczną, jak prawa elektrostatyki – por. np. równanie ciągłości i prawo Gaussa. Wynika stąd, że w każdym punkcie wektor prędkości wody jest wypadkową (sumą wektorową) trzech prędkości, jakie wystąpiły dla dopływu lub odpływu przez tylko jedną z trzech rurek. Z kolei każdy ze składników sumy można obliczyć ze wzoru

$$\vec{v} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3},$$

gdzie Q – wydajność źródła (w m^3/s), a $\vec{r}$ – wektor poprowadzony od źródła do danego punktu. Nietrudno przekonać się (zob. rys. 3 i 4), że jeśli woda nie dopływa z A do B wzdłuż odcinka AB, to tym bardziej nie dopływa okrężną drogą. Należy więc zbadać prędkość przepływu jako funkcję położenia wzdłuż odcinka AB

$$v(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{p}{(1-x)^2} - \frac{2}{(2-x)^2},$$

gdzie x jest współrzędną położenia (równą 0 w punkcie A, 1 w B i 2 w C), p jest szukanym poborem wody w B, a czynnik 4π dla uproszczenia pominięto. Woda z A dopływa do B wtedy, gdy funkcja $v(x)$ jest dodatnia na całym odcinku $[0,1]$. Analiza numeryczna wskazuje, że jest tak dla $p > 0{,}0044$ – przy poborze mniejszym czerpana woda nie zawiera domieszki z A.

144. Rozpatrując ruch przedstawiony na rysunku 1 najlepiej jest dla uproszczenia przyjąć, że nie występuje przy tym przemieszczenie środka masy ciała (nogi „równoważą się" z górną częścią tułowia). Przy takim założeniu ruch ciała wynika z oddziaływania „skrętnego" między ciałem a huśtawką – tzn. wystąpi **moment** siły, podczas gdy całkowita siła oddziaływania ciała na huśtawkę będzie taka, jak w przypadku ciała nieruchomego. Pod wpływem tego oddziaływania huśtawka cofnie się, gdy wyprostujemy nogi i odchylimy tułów do tyłu, a przesunie się do przodu przy ruchu odwrotnym (w tym punkcie można też powołać się na zasadę zachowania momentu pędu względem punktu zawieszenia huśtawki). Należy więc prostować nogi i odchylać do tyłu tułów w fazie, gdy huśtawka odchylona jest do tyłu (najlepiej w okolicy maksymalnego wychylenia), a podkurczać nogi i pochylać się do przodu podczas wychylenia huśtawki do przodu. Widzimy też, że tą drogą można rozkołysać huśtawkę nawet wtedy, gdy początkowo była nieruchoma.

Alternatywną metodą rozwiązania jest zwrócenie uwagi na bilans energii, gdyż wzrost energii wahań może nastąpić tylko dzięki pracy dziecka. W drugim spośród rozpatrywanych ruchów należy podnosić się wtedy, gdy nacisk stóp na huśtawkę jest największy – czyli w punkcie przejścia przez położenie pionowe, gdy do ciężaru dodaje się siła odśrodkowa (oczywiście, ma to sens tylko wtedy, gdy huśtawka już się kołysze). Opuszczać się należy zaś wtedy, gdy nacisk jest najmniejszy, czyli najmniejsza jest odebrana tą drogą energia – zatem w położeniach skrajnych. Stosując podobne rozumowanie do ruchu na rysunku 1 można dojść do identycznych wyników jak poprzednio.