epsilon

1/93
(23)

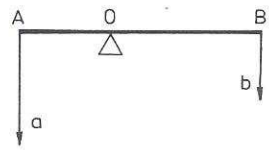
Środek ciężkości w nieskończoności

Niektóre zadania geometryczne można szybko rozwiązać stosując pojęcie środka ciężkości układu punktów. Oto przykład:

Zadanie 1. *Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC obrano punkty C', A', B' różne od wierzchołków. Niech $k_C = AC'/C'B$, $k_A = BA'/A'C$, $k_B = CB'/B'A$. Wykazać, że jeśli $k_A k_B k_C = 1$, to proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.*

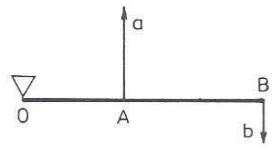
Rozwiązanie. Przywiążmy w wierzchołkach A, B, C trójkąta obciążniki o ciężarach k_B, $k_B k_C$, $k_B k_C k_A = 1$. Oznaczmy przez O środek ciężkości trójkąta ABC. Punkt A' jest środkiem ciężkości punktów B, C, zatem prosta AA' przechodzi przez punkt O. Podobnie proste BB' i CC' przechodzą przez punkt O, więc proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

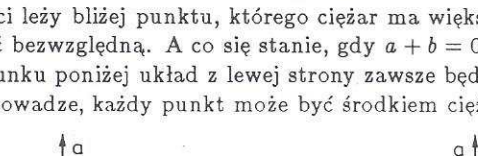
Przypomnijmy, że środek ciężkości O dwóch punktów A, B o ciężarach a, b znajdujemy z zasady dźwigni dwustronnej: $a \cdot OA = b \cdot OB$.



Innymi słowy, punkt O dzieli odcinek (skierowany) AB w stosunku b/a. Słowo „skierowany" jest tu potrzebne, bo kolejność punktów jest istotna: punkt O dzieli odcinek skierowany BA w stosunku a/b.

Przywiązując w punktach płaszczyzny baloniki zamiast ciężarków możemy rozważać również ciężary ujemne. Zasada dźwigni jednostronnej pokazuje, jak znaleźć środek ciężkości, jeśli punkty mają ciężary o przeciwnych znakach. W tym przypadku punkt O dzieli odcinek skierowany AB w stosunku $b/a < 0$. Jest to zgodne z konwencją, że stosunek podziału odcinka jest ujemny, jeżeli punkt podziału leży na zewnątrz odcinka. Dla celów praktycznych dobrze jest pamiętać, że środek ciężkości leży bliżej punktu, którego ciężar ma większą wartość bezwzględną. A co się stanie, gdy $a + b = 0$? Na rysunku poniżej układ z lewej strony zawsze będzie w równowadze, każdy punkt może być środkiem ciężkości.





W tym przypadku uznajemy, że środek ciężkości jest nieokreślony. Z kolei układ z prawej strony nigdy nie będzie w równowadze, zatem środek ciężkości nie istnieje. Zauważmy jednak, że jeśli $a \neq -b$, $b \neq 0$ i a dąży do $-b$, to środek ciężkości leży na prostej AB i oddala się do nieskończoności. Dlatego przyjmiemy, że w przypadku, gdy $a + b = 0$ i $b \neq 0$, środek ciężkości leży w punkcie w nieskończoności, wyznaczonym przez kierunek prostej AB.

Przypadek, gdy środek ciężkości leży w nieskończoności, również może być pożyteczny. Zilustrujemy to na przykładzie zadania z XXII Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 2. *W trójkącie ABC o bokach różnej długości punkt B_A jest obrazem symetrycznym punktu B względem dwusiecznej kąta A. Podobnie definiujemy punkty A_B, A_C, C_A, B_C i C_B. Wykazać, że proste $A_B B_A$, $A_C C_A$ i $B_C C_B$ są równoległe.*

Rozwiązanie. Oznaczmy długości boków trójkąta przez $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. W wierzchołkach A, B, C umieszczamy ciężary $a(b-c)$, $b(c-a)$, $c(a-b)$. Zauważmy, że ciężary punktów są niezerowe, a ich suma wynosi zero. Środek ciężkości trójkąta leży zatem w nieskończoności (środek ciężkości trzech niewspółliniowych punktów o niezerowych ciężarach nie może być nieokreślony). Rozbijmy teraz układ na dwie części U, V: układ U składa się z punktu A o ciężarze $a(b-c)$ oraz punktu C o ciężarze ac, zaś układ V z punktu C o ciężarze $-bc$ oraz punktu B o ciężarze $b(c-a)$. Z definicji punktu B_A wynika, że jest on środkiem ciężkości układu U. Podobnie punkt A_B jest środkiem ciężkości układu V. Zatem prosta $A_B B_A$ musi przechodzić przez środek ciężkości trójkąta. Podobnie jest z prostymi $B_C C_B$ oraz $C_A A_C$. Nasze trzy proste przecinają się zatem w nieskończoności, są więc równoległe.

Czy jednak rozwiązania wykorzystujące środek ciężkości w nieskończoności są poprawne? Okazuje się, że można tę metodę łatwo uzasadnić za pomocą geometrii rzutowej – ale o tym kiedy indziej.

Piotr KOBAK

Galeria Jednego Cytatu

Podejście Leibniza zostało skutecznie wyeliminowane przez dwóch osobników, z których jeden nazywał się *EPSILON*, a drugi *DELTA*.

(z wykładu o analizie niestandardowej)

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.