Klub 44

$\sqrt[\otimes]{\textstyle\int\!\!\sum !}=44$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1993

Zadania z matematyki nr 251, 252

Redaguje Marcin E. KUCZMA

251. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ nie są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że prosta przechodząca przez ortocentra (punkty przecięcia wysokości) trójkątów PAB i PCD jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki boków BC i DA.

252. Ciąg wielomianów $W_0(x)$, $W_1(x)$, ... jest określony przez warunki $W_0(x) = 1$, $W_{n+1}(x) = W_n{}'(x) - 2x\,W_n(x)$. Dowieść, że

$$W_{2k+1}(0) = 0\,, \quad W_{2k}(0) = \frac{(-1)^k(2k)!}{k!} \quad \text{dla } k = 0,1,2,\ldots.$$

Zadanie **252** zaproponował pan Piotr Żmijewski z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 237 (WT=1,47) i 238 (WT=2,27)
z numeru 3/1992

Marek Pranza	– Poraj	41,29
Mikołaj Rotkiewicz	– Warszawa	36,34
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	35,52

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1992

Przypominamy treść zadań:

243. Na każdym polu szachownicy stoi sześcian, którego jedna ściana jest czarna, a pozostałe białe. Chcemy, aby wszystkie czarne ściany znalazły się na górze. Można tylko jednocześnie obracać wszystkie sześciany dowolnie wybranego rzędu poziomego lub pionowego wokół ich wspólnej osi obrotu. Wskazać algorytm.

244. Na płaszczyźnie dany jest punkt P. Wynaczyć kres górny pól trójkątów ABC o tej własności, że $|PA| + |PB| + |PC| = 1$.

243. Przyjmijmy zwykłe oznaczenie pól szachownicy ($a1, \ldots, h8$); tymi samymi symbolami będziemy też oznaczać sześciany stojące na odpowiednich polach. Sześcian $b2$ przylega swoją „lewą" ścianą do $a2$, a „przednią" ścianą do $b1$; podobnie określamy lewe i przednie ściany pozostałych sześcianów. Sześciany $a1, \ldots, a8$ tworzą „oś a"; Sześciany $a1, \ldots, h1$ tworzą „oś 1"; analogicznie określamy osie $b, \ldots, h$ oraz osie $2, \ldots, 8$.

Kręcąc osią a i osią 1 doprowadzamy czarną ścianę sześcianu $a1$ do pozycji ściany przedniej. Następnie, kręcąc osią a i osią 2 doprowadzamy czarną ścianę sześcianu $a2$ do pozycji ściany przedniej (nie naruszając przy tym ustalonej poprzednio przedniej pozycji czarnej ściany $a1$). Tak samo postępujemy kolejno z sześcianami $a3, \ldots, a8$: wszystkie ich czarne ściany znajdą się w przedniej pozycji. Teraz wykonując jeden ruch każdą z osi $1, \ldots, 8$ przemieszczamy te czarne ściany do pozycji ściany górnej. Wreszcie jednym ruchem osi a przenosimy je do pozycji ściany lewej.

Do tej pory kręciliśmy tylko osią a oraz osiami $1, \ldots, 8$. Teraz wykonujemy analogiczną serię czynności z sześcianami osi b; kręcimy przy tym jedynie osią b i osiami $1, \ldots, 8$; czarne ściany sześcianów osi a nie zmieniają ustalonych „lewych" pozycji. Dalej, to samo robimy z sześcianami osi c, d, e, f, g, h. Wszystkie czarne ściany znajdą się w pozycji ściany lewej.

I ostatni krok – jeden ruch (obrót o 90°) każdej z osi $a, \ldots, h$: wszystkie czarne ściany są na górze!

244. Dla każdego trójkąta ABC istnieje dokładnie jeden punkt T, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna. Gdy miary wszystkich kątów trójkąta są $< 120°$, wówczas T jest punktem (wewnątrz trójkąta), z którego wszystkie boki widać pod kątem 120°. Gdy trójkąt ma kąt rozwarty o mierze $\geq 120°$, wówczas T pokrywa się z wierzchołkiem tego kąta.

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem o rozważanej własności $|PA| + |PB| + |PC| = 1$ i niech T będzie punktem, o którym mowa wyżej. Zatem $|TA| + |TB| + |TC| \leq 1$. Przesuwamy trójkąt ABC o wektor $\overrightarrow{PT}$ i otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$, w którym $|PA'| + |PB'| + |PC'| \leq 1$. Jego obraz jednokładny $A''B''C''$ (jednokładność o środku P, w stosownej skali ≥ 1) jest trójkątem o polu nie mniejszym od pola ABC i takim, że $|PA''| + |PB''| + |PC''| = 1$, przy czym P jest punktem o minimalnej sumie odległości od wierzchołków A'', B'', C''.

Wystarczy więc ograniczyć rozważania do trójkątów takiej postaci. Niech ABC będzie takim trójkątem. Jeśli któryś z kątów, np. $\sphericalangle C$, ma miarę $> 120°$ (a więc $P = C$), to trójkąt o dwóch bokach długości $|AP|$, $|BP|$, tworzących kąt 120°, ma większe pole. Można zatem ograniczyć uwagę do trójkątów o wszystkich kątach $\leq 120°$ i wszystkich bokach widocznych z punktu P pod kątem 120° (lub – w granicznym przypadku – jednym boku widocznym pod kątem 120° oraz dwóch bokach widocznych pod kątem 0°). Jeśli odległości wierzchołków takiego trójkąta od punktu P oznaczymy przez x, y, z, to jego pole będzie równe

$$S = \left(\sqrt{3}/4\right)\left(yz + zx + xy\right).$$

Zadanie sprowadza się do maksymalizacji tego wyrażenia przy warunku $x + y + z = 1$ ($x, y, z \geq 0$).

Gdy liczby x, y, z spełniają ten warunek, to na mocy nierówności Cauchy'ego–Schwarza

$$1 = (1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) =$$
$$= 3\big((x+y+z)^2 - 2(yz+zx+xy)\big) = 3 - 6(yz+zx+xy)\,,$$

a stąd $yz + zx + xy \leq 1/3$ i $S \leq 1/\left(4\sqrt{3}\right)$. Równość uzyskujemy dla $x = y = z = 1/3$. Odpowiada to sytuacji, gdy ABC jest trójkątem równobocznym o wysokości mającej długość 1/2. Jego pole wynosi $1/\left(4\sqrt{3}\right)$, i to jest właśnie szukany kres górny.

Zadania z fizyki nr 149, 150

Redaguje Jerzy B. BROJAN

149. W celu usprawnienia komunikacji między Ziemią i Księżycem rozpięto od jednego do drugiego ciała niebieskiego drabinkę sznurową (przyjmijmy dla uproszczenia, że Ziemia jest zwrócona do Księżyca stale tą samą stroną, jak Księżyc do Ziemi). Masa jednego kilometra drabinki jest równa 100 kg. Do którego ciała – Księżyca czy Ziemi – drabinka musi być przymocowana, aby nie spadła na drugie? Ile wynosi siła napięcia w miejscu przymocowania, jeśli o drugie ciało drabinka opiera się luźno? Ile wynosi maksymalna siła napięcia drabinki i w którym miejscu to maksimum występuje? Potrzebne dane wziąć z tablic.

150. Dopuszczalna wielkość rozmycia obrazu na kliszy fotograficznej wynosi $d = 0,1$ mm. Jaki jest zakres „głębi ostrości", tzn. w jakim zakresie odległości od przedmiotu rozmycie mieści się w tych granicach, jeśli ogniskowa obiektywu wynosi $f = 50$ mm, średnica otworu obiektywu $h = 30$ mm, a obiektyw nastawiono na odległość $l = 5$ m?

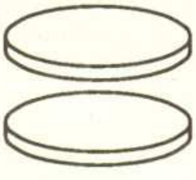
Termin nadsyłania rozwiązań
31 III 1993

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1992

Przypominamy treść zadań:

141. Wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczonych jest nieskończenie wiele ładunków punktowych dodatnich i ujemnych na przemian, o tej samej wartości bezwzględnej. Zbadać (analitycznie lub numerycznie), jak szybko maleje natężenie pola elektrycznego w miarę oddalania się od prostej.

142. Które z następujących hipotetycznych zjawisk są zgodne z zasadą symetrii zwierciadlanej, a które nie?
a) Dwa płaskie krążki ustawione równolegle (rys. 1) przyciągają się, gdy obracają się w tę samą stronę, a odpychają, gdy obracają się w przeciwne strony.
b) Krążek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
c) Krążek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w którąkolwiek stronę, a nie oddziałuje z nim, gdy jest nieruchomy.
d) Krążek przyciąga ładunek dodatni, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
e) Krążek przyciąga biegun N magnesu, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.



Rys. 1

141. Naszkicujmy najpierw przebieg linii pola (rys. 2). Widzimy, że w płaszczyznach prostopadłych do prostej i przechodzących przez ładunki pole ma kierunek radialny (prostopadły do prostej), a w płaszczyznach leżących w połowie odległości między ładunkami pole ma kierunek równoległy do prostej. Dla uproszczenia ograniczymy się więc do tych dwóch przypadków, a ponadto przyjmiemy, że odstęp między ładunkami oraz stała $q/4\pi\varepsilon_0$ mają wartość jednostkową. Dodając wektory natężenia pola ładunków

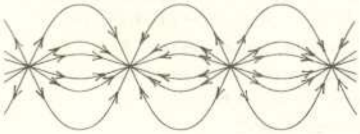
$$\vec{E}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

otrzymujemy w pierwszym przypadku szereg przedstawiający składową radialną pola w odległości r od prostej:

$$E_\perp(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{(r^2+1)^{3/2}} + \frac{2r}{(r^2+4)^{3/2}} - \frac{2r}{(r^2+9)^{3/2}} + \ldots$$

W drugim przypadku składowa równoległa jest dana szeregiem

$$E_{||}(r) = \frac{1}{[r^2+(1/2)^2]^{3/2}} - \frac{3}{[r^2+(3/2)^2]^{3/2}} + \frac{5}{[r^2+(5/2)^2]^{3/2}} - \ldots$$



Rys. 2

Mając do dyspozycji komputer nietrudno sporządzić tabelę

r	1	2	3	4	5
$E_\perp$	0,4275	0,0124	$4,30\cdot10^{-4}$	$1,59\cdot10^{-5}$	$6,1\cdot10^{-7}$
$E_{\parallel}$	0,3696	0,0115	$4,09\cdot10^{-4}$	$1,53\cdot10^{-5}$	$5,9\cdot10^{-7}$

Mamy tu do czynienia ze spadkiem wykładniczym. Aby się o tym przekonać, można wykreślić logarytm $E_\perp$ lub logarytm $E_{||}$ w zależności od r – są to w przybliżeniu linie proste. Analityczne wyprowadzenie tej własności jest dość trudne, gdyż wymaga zastosowania metod teorii funkcji zmiennej zespolonej. Wynikiem jest wzór asymptotyczny

$$E \sim \mathrm{e}^{-\pi r}/\sqrt{r}.$$

Zadanie to wraz z otrzymanym rezultatem może służyć jako model objaśniający zanik pola elektrycznego ciał stałych.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 135 (WT=2,56) i 136 (WT=3,22)
z numeru 3/1992

Paweł Perkowski	– Szczecin	41,86
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	29,11
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,47
Przemysław Gworys	– Częstochowa	19,56
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	19,01

Prosimy o przestrzeganie terminów przysyłania rozwiązań zadań. Nadesłane przez p. Wietechę z dwutygodniowym opóźnieniem rozwiazanie zadania 134 (data stempla pocztowego 13 czerwca) nie zostało – niestety – uwzględnione w punktacji.

142. Jeśli zjawisko jest zgodne z symetrią zwierciadlaną, to obserwowane w zwierciadle nie może sobie zaprzeczać. Odbicie lustrzane zmienia obrót prawoskrętny w lewoskrętny oraz zmienia bieguny N i S magnesu (zwrot pola magnetycznego jest umowny i opiera się na regule śruby prawoskrętnej). Nie zmienia się przy odbiciu znak ładunku ani zwrot siły (np. przyciąganie pozostaje przyciąganiem). Dlatego sprzeczne z symetrią zwierciadlaną są zjawiska b) i d), a zgodne są a), c) i e).