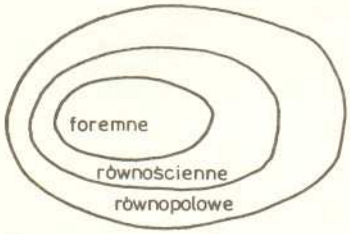
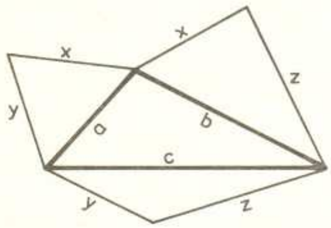
Wędrówki

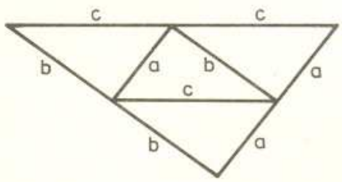
Małgorzata MIKOŁAJCZYK,
Krzysztof OMILJANOWSKI



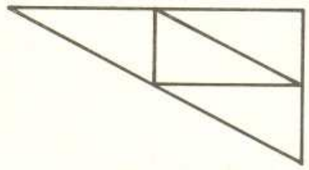
Rys. 1



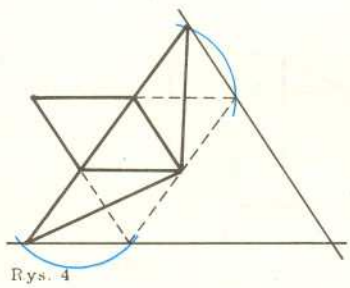
Rys. 2. $a \le b \le c$, $a \ne c$.



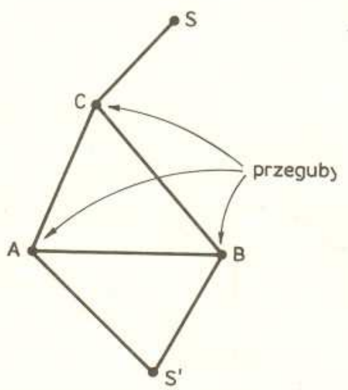
Rys. 3



Rys. 3a. Ten „czworościan" skleja się na płasko.



Rys. 4



Rys. 5. Punkty A, B, C tworzą trójkąt. Pozostałe odcinki poruszają się w przegubach. Kiedy uda się połączyć punkty S i S'?

Poniższy tekst to relacja z wędrówki po górach (świecie trójwymiarowym) typowego człowieka z równin (płaszczyzny). Wciąż zdziwiony rozgląda się wokoło; to bywa zaskoczony nie spotykanym dotąd widokiem, to znów dostrzega swojskie krajobrazy, dobrze mu z równin znane. Nie wszędzie potrafi się wdrapać, czasem zawraca z obranej drogi, ale nie tyle zdobyte szczyty, co możliwość podglądania tego nie znanego mu świata i trud wspinaczki sprawiają mu prawdziwą radość.

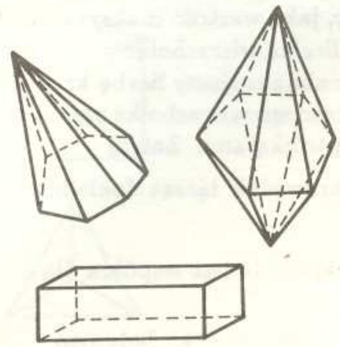
A mówiąc zupełnie poważnie – zajmiemy się poszukiwaniem analogii między geometrią dwu- i trójwymiarową. Twierdzenia geometrii „płaskiej" przekładać będziemy na twierdzenia „przestrzenne" i zbadamy, czy są prawdziwe. Tylko jak dokonać tego przekładu? Jak budować analogie między światem dwóch i trzech wymiarów? Możliwości jest wiele. Wybierzemy te, które są najbardziej naturalne. Na przykład, gdy pomyślimy o rzucie przestrzeni na ustaloną płaszczyznę, to na ustalony punkt jest przekształcana prosta, podobnie odpowiednikiem prostej jest płaszczyzna. No tak, ale w ten sposób dla koła otrzymamy w przestrzeni taki nieskończony walec, który trudno uznać za dobry analogon. Każdy przecież powie, że trójwymiarowym odpowiednikiem koła jest kula. W sposób równie oczywisty sześcian uznany zostanie za odpowiednik kwadratu, objętość za odpowiednik pola, trójkątowi zaś zapewne przypisany zostanie czworościan.

Czy zawsze jest tak łatwo? Co, na przykład, jest analogonem trójkąta równobocznego? Wszak trójkąt równoboczny można definiować przez równość długości boków lub ich przystawanie, lub można powiedzieć po prostu, że każde dwa jego wierzchołki są w jednakowej odległości. Zatem, czy odpowiednikiem trójkąta równobocznego jest:
czworościan foremny – krawędzie jednakowej długości;
a może
czworościan równopolowy – ściany o tym samym polu;
lub też
czworościan równościenny – ściany przystające?

Zamiast dyskutować, które określenie jest najlepsze – zbadajmy zależności między nimi. Rysunek 1 pokazuje oczywiste zawierania zbiorów tych czworościanów, ale czy wszystkie zawierania są właściwe? Rysunek 2 przedstawia poszukiwaną siatkę nieforemnego czworościanu równościennego. Drobna dyskusja daje $x = c$, $y = b$, $z = a$, a twierdzenie Talesa pozwala poprawić rysunek (rys. 3). Ale czy z tego zawsze da się skleić czworościan? Spróbuj! (Uwaga: czasem to bywa kłopotliwe – rys. 3a). A czy potrafisz wskazać czworościan równopolowy nie będący równościennym? Na rysunku 4 jest przedstawiona siatka jednego z takich czworościanów.

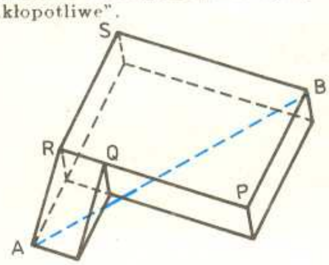
Czy pamiętasz zadanie o trzech patyczkach na płaszczyźnie? Kiedy można z nich ułożyć trójkąt? Spróbujmy analogicznie sformułować problem sześciu patyczków: kiedy można z nich zbudować szkielet czworościanu? To jest chyba dość kłopotliwe, bo trzeba uwzględniać różne permutacje patyczków. Wystarczająco ciekawe wydaje się pytanie przedstawione na rysunku 5.

Skoro potrafimy podać przestrzenny analogon trójkąta i koła, zacznijmy „tłumaczenie" twierdzeń od tego o kole opisanym na trójkącie. To łatwe: „Na każdym czworościanie..." itd. No tak, ale czy to twierdzenie jest prawdziwe? Tak, to nietrudne; przypomnijmy sobie dowód tego twierdzenia dla trójkąta. Kluczem było tam pojęcie symetralnej pary punktów A, B – zbioru punktów, których odległości od A i B są równe. Takie samo określenie symetralnej w przestrzeni daje płaszczyznę prostopadłą do odcinka AB, przechodzącą przez jego środek. Wystarczy tylko wiedzieć, że trzy parami nierównoległe



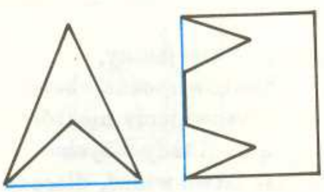
Rys. 6 $n = 8$

Jeśli rozważamy nie tylko wielościany wypukłe, to mogą pojawić się sytuacje „kłopotliwe".

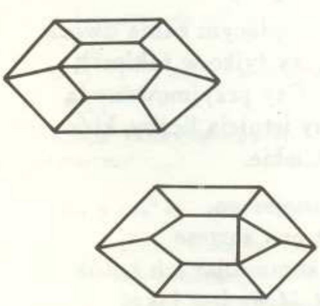


Czy Q jest wierzchołkiem?
Czy PR jest krawędzią?
Czy $PQRSB$ jest ścianą pięcio- czy czworokątną?
Czy AB jest przekątną?
A czy jest przekątną $A'B'$?

Zresztą te same kłopoty znamy już dobrze z płaszczyzny:



Rys. 7



Rys. 8

płaszczyzny mają dokładnie jeden punkt wspólny. To było właściwie nie tylko „tłumaczenie" twierdzenia, ale także jego dowodu. Czy podobnie możemy postąpić z twierdzeniem o kole wpisanym w trójkąt? Czy w każdy czworościan można wpisać kulę? I to dokładnie jedną? Tak. Znowu daje się „przetłumaczyć" dowód z przypadku płaskiego. Dwusieczna będzie teraz półpłaszczyzną połowiącą kąt dwuścienny między dwiema ścianami czworościanu.

Pamiętasz pewnie, że znając promień r okręgu wpisanego w trójkąt łatwo było znaleźć jego pole:

$$\text{pole} = \frac{1}{2} \cdot \text{obwód} \cdot r\,.$$

Dla czworościanu i wpisanej weń kuli mamy analogicznie:

$$\text{objętość} = \frac{1}{3} \cdot \text{pole ścian} \cdot r\,.$$

Spróbuj przetłumaczyć „płaski" dowód tego faktu. A jak przetłumaczyć wzór Herona? Czy jest prawdziwy?

Skoro była już mowa o symetralnych i dwusiecznych, zajmijmy się środkowymi. Środkowe w trójkącie to odcinki łączące wierzchołki ze środkami (ciężkości) przeciwległych boków. Przecinają się one w środku ciężkości trójkąta dzieląc się w stosunku 2:1. Czym będą środkowe w czworościanie? To pewnie odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych ścian. Czy przetną się i tym razem w jednym punkcie? (Jeśli tak, to punkt ten możemy śmiało uznać za środek ciężkości czworościanu.) Czy środkowe będą się dzieliły w jakimś stałym stosunku? 2:1? A może 3:1? Powspinaj się chwilę samotnie i spróbuj znaleźć odpowiedź.

Do tej pory było wspaniale; wszystkie nowe twierdzenia okazywały się prawdziwe. Śmiało więc szukajmy dalej. Spróbujmy obliczyć liczbę przekątnych wielościanu; czy jest to w ogóle możliwe? A może zadanie jest tak proste jak w przypadku wielokąta na płaszczyźnie, gdzie liczba przekątnych n-kąta to: $\frac{n(n-3)}{2}$? W przestrzeni sprawa się trochę komplikuje. Dla tej samej liczby wierzchołków wielościanu możemy uzyskiwać różne liczby przekątnych. Niech P_n oznacza liczbę przekątnych wielościanu o n wierzchołkach. Dla każdej liczby parzystej $n \geq 6$ możemy otrzymać:

$P_n = 0$ – w ostrosłupie o podstawie $(n-1)$-kątnej,

$P_n = \frac{(n-2)(n-5)}{2} + 1$ – w wielościanie powstałym przez zlepienie podstawami dwóch ostrosłupów o podstawie $(n-2)$-kątnej,

$P_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}n - 3\right)$ – w graniastosłupie o podstawie $\frac{1}{2}n$-kątnej.

Zatem znajomość liczby wierzchołków tym razem nie wystarcza. Co jeszcze musimy wiedzieć o wielościanie, aby jednoznacznie podać liczbę jego przekątnych? Czym w ogóle jest przekątna wielościanu? (Patrz rysunek 7.) Przyjmijmy, że jest ona odcinkiem łączącym wierzchołki, nie będącym krawędzią ani przekątną ściany.

Jeśli wielościan ma w wierzchołków, k krawędzi i s ścian takich, że i-ta ściana ma p_i krawędzi, to

$$P_w = \binom{w}{2} - k - \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i(p_i-3)}{2}\,.$$

Jest to liczba określona jednoznacznie dla zadanych wartości w, k, s, p_1, $p_2, \ldots, p_s$. Czy jednak musimy aż tak dokładnie znać wielościan, by policzyć jego przekątne? Przecież k i $p_1, p_2, \ldots, p_s$ są związane zależnością $2k = \sum_{i=1}^{s} p_i$ – każda krawędź jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian. Może wystarczy znać np. tylko liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu? Odpowiedź na to pytanie jest, niestety, negatywna. Spójrz na rysunek 8 – oba wielościany mają tę samą liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian, a różną liczbę przekątnych.

Rozwiązanie zadania M 651.
Warunek podany w zadaniu oznacza (wobec ciągłości g), że albo dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ mamy nierówność $g(x) > x$, albo dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $g(x) < x$. W pierwszym przypadku $g(g(x)) > g(x) > x$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$, w drugim zaś odpowiednio $g(g(x)) < g(x) < x$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Wzór Eulera dla wielościanów:

$$w - k + s = 2.$$

Wiemy, że

$$k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} p_i$$

i

$$w - k + s = 2.$$

Stąd

$$w - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} p_i + \sum_{i=1}^{s} 1 = 2$$

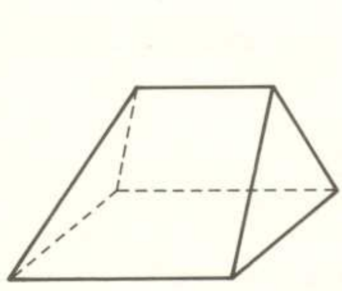
$$w - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(p_i - 2) = 2$$

$$w = 2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(p_i - 2).$$

Rozwiązanie zadania M 649.
Oznaczmy długości boków trójkąta przez a, b i c, długości zaś wysokości przez $h(a), h(b)$ i $h(c)$ (w zależności od tego, na który bok opuszczona jest wysokość). Z warunków zadania mamy $a \le h(a)$ oraz $b \le h(b)$. W każdym trójkącie wysokość jest nie dłuższa od sąsiedniego boku, zatem otrzymujemy nierówności

$$a \le h(a) \le b \le h(b) \le a,$$

skąd $a = h(b) = b = h(a)$. Widzimy więc, że boki a i b są prostopadłe i mają równe długości, zatem trójkąt ma kąty $45°$, $45°$ i $90°$.



Rys. 9. Ten wielościan też nie ma przekątnych (a nie jest ostrosłupem!).

Warto zajrzeć do *epsilona* w *Delcie* 5/1992.

Zauważyliśmy, że jeśli ustalimy liczbę w wierzchołków wielościanu, to możemy otrzymać różne liczby przekątnych P_w. Zapytajmy, jaką wartość maksymalną może przyjmować P_w. Oczywiście, przy ustalonej liczbie wierzchołków maksymalną liczbę przekątnych uzyskamy, gdy zminimalizujemy liczbę krawędzi i przekątnych ścian. Na pewno tak będzie, gdy z każdego wierzchołka wychodzić będą tylko trzy krawędzie, a wszystkie ściany będą trójkątami. Zatem
$k = \frac{3w}{2}$, bo z każdego wierzchołka wychodzą trzy krawędzie łącząc dokładnie dwa wierzchołki,
$k = \frac{3s}{2}$, bo wszystkie ściany są trójkątami i każda krawędź jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian.
Stąd $s = w$ i podstawiając do wzoru Eulera otrzymujemy $w = 4$. Jedynym wielościanem spełniającym zadane warunki jest więc czworościan.
A co z pozostałymi?

Zauważmy, że żądanie, by wszystkie ściany wielościanu o w wierzchołkach były trójkątami, już dokładnie wyznacza liczbę przekątnych (specyfikacja kształtów poszczególnych ścian jest do tego warunkiem wystarczającym). Mianowicie, liczba przekątnych P_w^* takiego wielościanu jest funkcją liczby wierzchołków:
$k = \frac{3s}{2}$, zatem $w - \frac{3s}{2} + s = 2$, stąd $s = 2(w-2)$ i

$$P_w^* = \binom{w}{2} - k = \frac{w(w-1)}{2} - 3(w-2).$$

Spróbujmy uzasadnić, że żadne P_w nie przekroczy liczby P_w^*. Pytamy zatem, czy:

$$P_w = \binom{w}{2} - k - \sum_{i=1}^{s}\frac{p_i(p_i-3)}{2} \le \frac{w(w-1)}{2} - 3(w-2) = P_w^*.$$

Przekształcamy:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} p_i + \sum_{i=1}^{s}\frac{p_i(p_i-3)}{2} \ge 3\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(p_i-2),$$

$$\sum_{i=1}^{s} p_i + \sum_{i=1}^{s} p_i(p_i-3) - 3\sum_{i=1}^{s}(p_i-2) \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{s}(p_i^2 - 5p_i + 6) \ge 0,$$

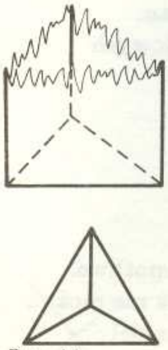
$$\sum_{i=1}^{s}(p_i-2)(p_i-3) \ge 0.$$

Pamiętając, że $p_i \ge 3$ widzimy, iż każdy składnik sumy jest nieujemny, co dowodzi żądanej nierówności. („Stromiznę" tych rachunków można obejść mniej więcej tak: mając wielościan o w wierzchołkach dorysowujemy niektóre przekątne ścian tak, by otrzymać podział ścian na trójkąty. Każdy z tych trójkątów traktujemy teraz jako osobną ścianę. Wówczas łatwo widać, dlaczego $P_w \le P_w^*$.) Zatem znaleźliśmy ograniczenia na liczbę przekątnych wielościanu o w wierzchołkach:

$$0 \le P_w \le \frac{w(w-1)}{2} - 3(w-2) = \binom{w-3}{2}.$$

Wartość maksymalna przyjmowana jest w wielościanie będącym sumą dwóch ostrosłupów $(w-2)$-kątnych zlepionych podstawami (czy tylko w takim?), a wartość minimalna – w ostrosłupie $(w-1)$-kątnym. Czy przyjmowane są wszystkie wartości pomiędzy tymi ekstremalnymi? Czy istnieją liczby, które nigdy nie są wartościami P_w? To kolejne szczyty dla Ciebie.

To było jednak dość trudne. Może znajdziemy coś łatwiejszego.
Na przykład twierdzenie o sumie kątów trójkąta – jest ona zawsze równa π. Czy dla czworościanów jest podobnie? Czy suma miar ich kątów dwuściennych jest stała? Niezależna od czworościanu? Może jest jakąś wielokrotnością π?



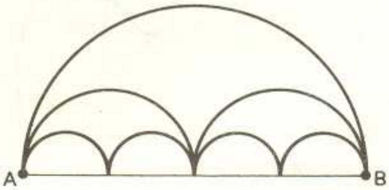
a) $S = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi$.

b) $S = 3 \cdot 0 + 3\pi$.

Rys. 10.

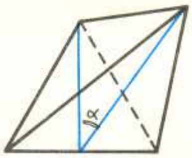
Chyba nie. Ustalmy podstawę czworościanu i czwartym wierzchołkiem uciekajmy coraz wyżej po prostej prostopadłej do podstawy, przechodzącej przez jej środek. W granicy otrzymujemy „nieskończone pudełko" – rysunek 10a. Kąty przy podstawie staną się proste, a suma trzech pozostałych wyniesie π. Natomiast, gdy ten czwarty wierzchołek spadnie na podstawę (rys. 10b), to kąty przy podstawie są zerowe, a pozostałe półpełne.

Więc nie udało się! Czyżby twierdzenie było fałszywe? Ale przecież w żadnym przypadku nie mieliśmy do czynienia z *prawdziwym* czworościanem! A z przejściem granicznym lepiej uważać. Pamiętasz przykład okręgu, w którym średnica „jest równa" połowie obwodu (rys. 11)? Aby uzyskać absolutną pewność, można zbadać funkcję, która (przy ustalonej podstawie) dla argumentu będącego wysokością czworościanu podaje jako wartość sumy S kątów dwuściennych tego czworościanu. To się pewnie daje zrobić (wszystko jest przecież dla ludzi!), ale wychodzą okropnie skomplikowane wzory, jakieś arcusy (brrr...), a tu jeszcze trzeba obliczać pochodną, by uzasadnić, że to nie jest funkcja stała! Spróbujmy już lepiej poszukać *porządnych* kontrprzykładów.



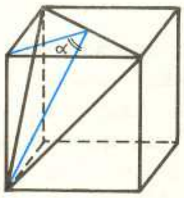
Rys. 11. Łańcuchy półokręgów o stałym promieniu coraz lepiej przybliżają odcinek $AB = 2$, choć ich długości są równe π.

Dla czworościanu foremnego obliczenie wartości S nie jest trudne (rys. 12).



Rys. 12. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $S = 6 \arccos \frac{1}{3}$.

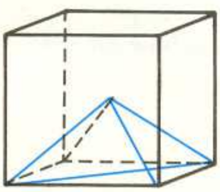
Łatwo też zobaczyć trzy kąty w czworościanie wyciętym z sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez trzy wierzchołki łączące się krawędziami z czwartym (rys. 13). Są to kąty proste. Pozostałe są za to mniej ciekawe.



Rys. 13. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
$S = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Jeśli połączymy środek sześcianu ze wszystkimi wierzchołkami, to dostaniemy sześć jednakowych piramid. Nie są to jescze, co prawda, czworościany, ale łatwo temu zaradzić przecinając każdą z nich na pół płaszczyzną przechodzącą przez przekątną ściany i środek sześcianu (rys. 14). Dla tych dwunastu jednakowych czworościanów łatwo można obliczyć sumę ich kątów dwuściennych:

$$12 \cdot S = 12 \cdot \frac{\pi}{2} + 8 \cdot 2\pi + 6\pi .$$



Rys. 14. $S = \frac{7}{3}\pi$.

Otrzymaliśmy więc trzy liczby:

$$s_1 = 6 \arccos \frac{1}{3}, \quad s_2 = 3\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad s_3 = \frac{7}{3}\pi .$$

Spróbujmy je porównać:

$$\cos s_3 = \cos \frac{7}{3}\pi = \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

$$\cos s_1 = \cos 6\alpha, \quad \text{gdzie } \cos\alpha = \frac{1}{3} \text{ i } \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

co po podstawieniu do wzoru (*) daje:

$$\cos s_1 = \frac{329}{729};$$

$$\cos s_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sin\left(3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \sin 3\beta, \quad \text{gdzie } \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

po podstawieniu otrzymujemy

$$\cos s_2 = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Zatem $s_1 \neq s_2 \neq s_3 \neq s_1$. Nie zachodzi więc twierdzenie o stałej sumie kątów dwuściennych czworościanu.

Skorzystamy z pomocy panów de Moivre'a i Newtona:

$$\cos 6\alpha + i \sin 6\alpha =$$
$$= (\cos\alpha + i \sin\alpha)^6 =$$
$$= \sum_{j=1}^{6} \binom{6}{j} \cos^{6-j}\alpha \cdot i^j \sin^j \alpha .$$

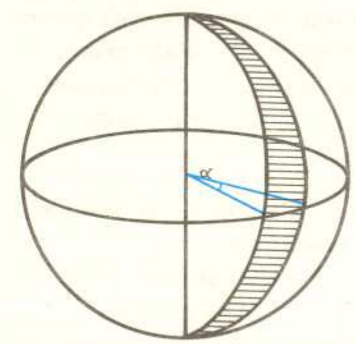
Porównując części rzeczywiste otrzymujemy:

(*)
$$\cos 6\alpha = \cos^6\alpha - 15\cos^4\alpha \sin^2\alpha + 15\cos^2\alpha \sin^4\alpha - \sin^6\alpha .$$

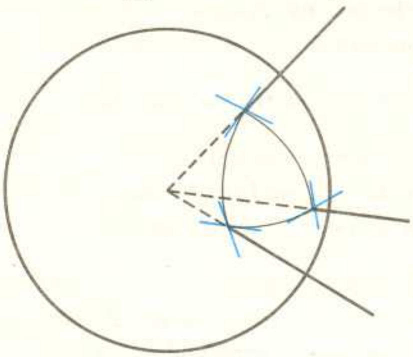
Podobnie wyprowadzamy

$$\sin 3\beta = 3\cos^2\beta \cdot \sin\beta - \sin^3\beta .$$

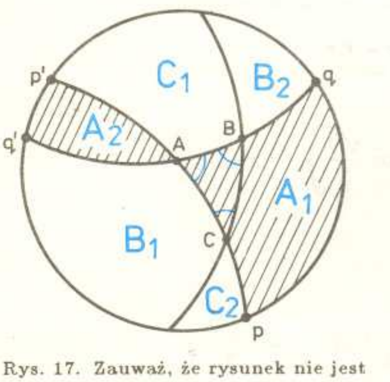
Może to jednak nasza wina, może braliśmy niedobre kąty? Czworościan ma cztery wierzchołki i przy każdym z nich pewien kąt bryłowy, może to one są analogonami katów płaskich w wierzchołkach trójkąta? Spróbujmy zbadać sumę tych „prawdziwych" kątów w czworościanie.



Rys. 15. Jeśli $\alpha = \frac{\pi}{6}$ to, oczywiście, 12 cząstek pomarańczy wypełni całą kulę. Skórka na naszym kawałku ma więc pole równe $\frac{1}{12}$ części sfery, tzn. $\frac{\pi}{3}R^2$.



Rys. 16



Rys. 17. Zauważ, że rysunek nie jest całkiem poprawny; pomyśl o symetrii środkowej względem środka kuli; wtedy wszystkie koła wielkie są przekształcane na siebie. Łuk pq przechodzi na łuk $p'q'$, a A_2 na tę niewidoczną część skórki pomarańczy wyciętą przez kąt A.

Znowu łatwo to zrobić dla czworościanu, z którego buduje się sześcian. Spójrz jeszcze raz na rysunek 14. Niech B oznacza sumę kątów bryłowych czworościanu. W tym czworościanie mamy:

$$12B = \underbrace{\text{kąt „pełny”}}_{\text{ten w środku}} + 8 \cdot \frac{1}{8} \underbrace{\text{kąta „pełnego”}}_{\text{narożnik}} .$$

Zatem $B = \frac{1}{6}$ kąta „pełnego”.

Znalezienie innych, łatwych do obliczenia przykładów wydaje się kłopotliwe. Trudno zobaczyć od razu kąt bryłowy czworościanu foremnego, gdyż nie można tymi kątami wypełnić przestrzeni wokół punktu. Sprawdź to koniecznie!

Przypadki „graniczne” są łatwe (znów rys. 10a,b):
„czworościan o nieskończonej wysokości” – $B = \frac{1}{4}$ kąta „pełnego” + 0,
„czworościan rozpłaszczony” – $B = \frac{1}{2}$ kąta „pełnego”.
No, ale znów trudno to uznać za uzasadnienie. Odstawmy na moment nasze pytanie i spróbujmy przyjrzeć się kątom bryłowym bardziej systematycznie.

Czym są kąty bryłowe? Jak je mierzyć? Czym jest tajemniczy kąt „pełny”? Jeśli wierzchołek kąta umieścimy w środku sfery o promieniu R, to miara tego kąta (przez analogię z miarą kąta płaskiego, oczywiście) wynosi:

$$\frac{\text{pole części sfery wyciętej przez ten kąt}}{R^2} .$$

Zatem kąt „pełny” ma miarę $\frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$ (steradianów). Kąt dwuścienny o mierze płaskiej α wycina z kuli (o środku leżącym na krawędzi tego kąta) cząstkę pomarańczy (rys. 15). Łatwo zauważyć, że dla dowolnego α pole wycięte przez taki kąt ze sfery wynosi $2\alpha R^2$. Zatem miara bryłowa kąta dwuściennego równa się jego podwojonej mierze płaskiej.

Każdy kąt trójścienny o wierzchołku w środku kuli (rys. 16) wycina na sferze trójkąt sferyczny. Kąty w jego wierzchołkach definiujemy jako kąty płaskie między stycznymi w punkcie do odpowiednich kół wielkich kuli. Kąty te są równe kątom dwuściennym pomiędzy odpowiednimi ścianami kąta trójściennego. Rozważajmy w dalszym ciągu trójkąty, których boki są mniejsze od połowy koła wielkiego. Czy (tak jak w przypadku pomarańczy) potrafimy obliczyć ich pole? Jeśli umieścimy taki kąt w środku sfery jednostkowej, to obliczone pole będzie miarą bryłową kąta trójściennego. Popatrzmy na rysunek półsfery (rys. 17), na którym wszystkie łuki to łuki kół wielkich. Zauważmy, że suma pól A_1 i A_2 stanowi dokładnie pole pomarańczy wyciętej przez kąt A. Podobnie dla innych. Zatem

$$\text{Pole}(A_1 \cup A_2) = 2\ (\angle A),$$
$$\text{Pole}(B_1 \cup B_2) = 2\ (\angle B),$$
$$\text{Pole}(C_1 \cup C_2) = 2\ (\angle C).$$

Po zsumowaniu pól po lewej stronie otrzymamy, oczywiście, pole półsfery powiększone o dwukrotność pola trójkąta ABC (liczymy je tu trzykrotnie). Mamy więc:

$$2\pi + 2 \cdot \text{Pole}_{ABC} = 2 \cdot (\angle A + \angle B + \angle C),$$

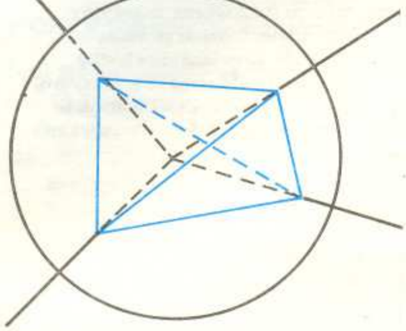
stąd

$$\text{Pole}_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi \text{ (na sferze jednostkowej)},$$

czyli pole trójkąta sferycznego to jego „przewyżka” ponad π.
Gdy teraz sumujemy kąty bryłowe czworościanu (pamiętając, że miara kąta trójściennego to suma miar (płaskich) kątów dwuściennych pomniejszona o π), to każdy kąt dwuścienny liczymy dwukrotnie.
Zatem $B = 2S - 4\pi$.

Nasze rozważania na temat kątów dwuściennych nie były więc daremne. Z negatywnej odpowiedzi na pytanie o stałość sumy kątów dwuściennych wynika negatywna odpowiedź na to pytanie dla kątów bryłowych.

Nie ma więc analogii twierdzenia o sumie miar kątów trójkąta w świecie trójwymiarowym. Spróbujmy jeszcze powalczyć z twierdzeniem o kącie wpisanym i środkowym. Kąt trójścienny jest wyznaczony przez trzy półproste o wspólnym początku. Jeśli wierzchołek kąta umieścimy w środku sfery (jednostkowej), to półproste te wyznaczą punkty A, B, C na sferze. Niech kąt wpisany odpowiadający temu kątowi środkowemu będzie dowolnym kątem trójściennym o krawędziach przechodzących przez punkty A, B, C i wierzchołku leżącym na sferze (po tej samej stronie płaszczyzny ABC co środek sfery). Czy wtedy miara takiego kąta wpisanego jest połową miary kąta środkowego? A może jedną trzecią?


Rys. 18

Wpiszmy w tę sferę dowolny czworościan zawierający środek sfery w swoim wnętrzu (rys. 18). Wtedy każde trzy wierzchołki czworościanu wyznaczają środkowy kąt trójścienny. Oczywiście, te cztery kąty sumują się zawsze do kąta pełnego (niezależnie od tego, jaki to czworościan). Natomiast kąty bryłowe czworościanu są teraz kątami wpisanymi odpowiadającymi tym kątom środkowym. Ich suma – jak wykazaliśmy – jest zależna od kształtu czworościanu. Jest to sytuacja zupełnie odmienna od sytuacji na płaszczyźnie.

Może należało inaczej zdefiniować kąt (niekoniecznie trójścienny) wpisany i środkowy? Być może. I nie jest to jedyny znak zapytania, jaki zostawiliśmy po drodze, bowiem w tych wędrówkach, tak jak w prawdziwych, w góry, trudno przewidzieć, co nas spotka. Ale mamy nadzieję, że przekonaliśmy Cię, iż po matematyce można równie wspaniale wędrować – omijać ścieżki zbyt łagodne, zawracać ze zbyt stromych i nieustannie cieszyć się, że przed nami pojawia się wciąż świat nowy, nieznany i piękny.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 649. W pewnym trójkącie dwie wysokości są nie krótsze od boków, na które je opuszczono. Jakie kąty ma ten trójkąt?
Rozwiązanie na str. 12

M 650. Na dwóch końcach ustalonej średnicy okręgu są ustawione dwie jedynki. W pierwszym kroku na środku każdego z dwóch łuków wpisujemy dwójkę, w drugim kroku – na środku każdego z czterech łuków wpisujemy trójkę; ogólnie, w n-tym kroku na środku każdego z 2^n łuków wyznaczonych przez wpisane już na okręgu liczby wpisujemy sumę liczb stojących na końcach tego łuku. Obliczyć sumę S_n liczb zapisanych na okręgu po wykonaniu n kroków.
Rozwiązanie na str. 16

M 651. Dany jest trójmian kwadratowy $g(x) = ax^2 + bx + c$ o tej własności, że równanie $g(x) = x$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Wykazać, że wtedy równanie czwartego stopnia $g(g(x)) = x$ także nie ma rozwiązań rzeczywistych.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 345. Pająk chcący przebyć wąski kanał z wodą o przekroju poprzecznym w kształcie półkola o promieniu R ruszył wpław prostopadle do brzegu. Prędkość pająka względem wody wynosiła u. Oblicz, jak daleko woda zniosła pająka, jeżeli prędkość wody w nurcie kanału była niewielka i wynosiła v_0.
Rozwiązanie na str. 7

F 346. Masy powietrza z okolic Warszawy przesunęły się o jeden stopień na północ, gdzie uprzednio panowała bezwietrzna pogoda. Oceń największą wartość składowej równoleżnikowej prędkości wiatru na północ od Warszawy.
Rozwiązanie na str. 6