To nie wszystko. Otóż w płaszczyźnie orbit ciał ciężkich istnieją jeszcze dwa punkty libracji, mianowicie w wierzchołkach trójkątów równobocznych rozpiętych na odcinku łączącym ciała ciężkie. Zgadnąć tego chyba się nie da, ale sprawdzić jest bardzo łatwo. Ku masie cięższej działa przyspieszenie o wartości bezwzględnej $1-\mu$ i o składowych $(1-\mu)[-\cos 60°, -\sin 60°] = (1-\mu)[-1/2, -\sqrt{3}/2]$. Ku masie lżejszej działa przyspieszenie μ o składowych $\mu[\cos 60°, -\sin 60°] = \mu[1/2, -\sqrt{3}/2]$. Wreszcie przyspieszenie odśrodkowe ma taką wartość liczbową, ile wynosi (w naszych zmodyfikowanych jednostkach) odległość wierzchołka trójkąta od środka masy układu, zatem jego składowe to po prostu długości przyprostokątnych trójkąta, którego ta odległość jest przeciwprostokątną: $[1/2-\mu, \sqrt{3}/2]$. Suma tych trzech przyspieszeń rzeczywiście jest równa zeru. Tak sprawdziliśmy istnienie tzw. trójkątnych punktów libracji L_4 i L_5.

Czy przyroda wykorzystuje istnienie punktów libracji? Pisaliśmy już o tym w *Delcie*, co prawda dość dawno (*Delta* 7/1982), więc przypomnieć chyba można. Otóż każdy z liniowych punktów libracji ma tę własność, że dowolnie małe zaburzenie bezruchu spoczywającej w nim cząstki powoduje natychmiastowe i bezpowrotne oddalenie się jej z miejsca startu – mówimy, że liniowe punkty libracji są niestabilne. Tu więc natura nie jest w stanie niczego na stałe umieścić. Inaczej jest w punktach trójkątnych: cząstka lekko wytrącona z punktu trójkątnego ma szanse przez pewien czas wykonywać wokół niego ruch okresowy, jeżeli $\mu < 0,0385...$ Warunek ten jest spełniony np. dla układu Słońce-Jowisz, dlatego w pobliżu jego trójkątnych punktów libracji przebywa kilkanaście tzw. planetoid trojańskich, tj. nazwanych imionami bohaterów wojny trojańskiej. Podobnie podejrzewa się obecności tzw. pyłowych satelitów Ziemi w trójkątnych punktach libracji układu Ziemia-Księżyc. Wskutek nieuniknionych w rzeczywistej sytuacji zaburzeń ruchu ciała znikomego cząstki takie muszą wcześniej czy później opuścić sąsiedztwo swojego punktu libracji, za to na ich miejsce mogą przylecieć inne; w rezultacie w punktach trójkątnych ma prawo utrzymywać się stałe zgęszczenie drobnych cząstek, składające się z cząstek coraz to innych. Wprawdzie planetoidy trojańskie jeszcze nie pouciekały z miejsc stałego pobytu, ale cierpliwości...

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 646. W przestrzeni trójwymiarowej dane są cztery punkty nie leżące w jednej płaszczyźnie. Ile istnieje różnych równoległościanów, dla których każdy z tych punktów jest jednym z wierzchołków?
Rozwiązanie na str. 16

M 647. O dwóch liczbach rzeczywistych a, b wiadomo tyle, że nierówność $a\cos x + b\cos 3x > 1$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Wykazać, że $|b| \le 1$.
Rozwiązanie na str. 16

M 648. Nauczyciel napisał na tablicy trójmian kwadratowy $x^2+3x+15$. Następnie wszyscy uczniowie w klasie podchodzili kolejno do tablicy; każdy z nich zmniejszał albo zwiększał o jeden współczynnik przy x albo wyraz wolny trójmianu. Na koniec okazało się, że na tablicy widnieje trójmian $x^2+13x+5$. Czy jest prawdą, że w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian o pierwiastkach całkowitych?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Jarosław KULPA

F 343. Kierowca nieopatrznie zapomniał zaciągnąć hamulec swojego poloneza pozostawionego na stoku góry o kącie nachylenia $\alpha = 10°$. Jaką największą prędkość będzie mógł rozwinąć staczający się samochód?
Dane dotyczące poloneza: masa $m = 1200$ kg, moc silnika $P = 55$ kW, maksymalna prędkość na poziomej nawierzchni $v_{max} = 140$ km/h.
Rozwiązanie na str. 5

F 344. Piłeczka kauczukowa po czasie $t = 0,5$ sekundy spadła na podłogę. Odbiła się na wysokość $\eta = 0,9$ pierwotnej wysokości. Ile trwał cały ruch piłeczki aż do momentu zatrzymania?
Rozwiązanie na str. 5