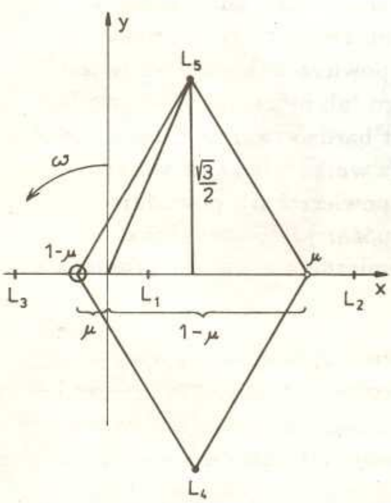
Punkty libracji

Tomasz KWAST

Modelem bardzo często spotykanej w przyrodzie sytuacji jest ruch umownie nieważkiej cząstki („ciała znikomego") w polu grawitacyjnym dwóch ciał o konkretnych niezerowych masach („ciał ciężkich") obiegających po orbitach kołowych wspólny środek masy. Chodzi o to, że w tym modelu ciało znikome nie wpływa na zadany z góry ruch ciał ciężkich. Widać, że model ten w przybliżeniu powinien opisywać np. ruch pocisku lecącego z Ziemi na Księżyc lub cząstki gazu przelatującej z jednej gwiazdy na drugą. Badanie tego modelu nazywane jest ograniczonym zagadnieniem trzech ciał.

Ruch ciała znikomego wygodnie jest opisywać w układzie współrzędnych zaczepionym w środku masy ciał ciężkich i obracającym się wraz z nimi. Ponadto, dla prostoty rachunków, wygodnie jest za jednostkę masy przyjąć sumę mas ciał ciężkich ($M_1 + M_2 = M = 1$), za jednostkę długości ich odległość ($R = 1$) i taką jednostkę czasu, by okres ich obiegu ($T = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$) wynosił 2π. G oznacza tu stałą grawitacji, która w tych jednostkach musi być równa 1. Łatwo zauważyć, że w tych jednostkach również prędkość kątowa obiegu, a więc i prędkość kątowa naszego układu współrzędnych ($\omega = \sqrt{GM/R^3}$), wynosi też 1. Masę lżejszego z ciał o niezerowych masach można teraz oznaczyć przez μ, cięższe musi mieć zatem masę równą $1-\mu$, a ich odległości od środka masy, jako odwrotnie proporcjonalne do tych mas, wynoszą odpowiednio $1-\mu$ i μ (rysunek).



Ruch ciała znikomego w tym wirującym układzie będzie się odbywać, oczywiście, pod wpływem przyspieszeń grawitacyjnych ze strony obu mas ciężkich oraz przyspieszenia odśrodkowego. Ruchem akurat zajmować się nie będziemy, stawiamy tylko akademickie pytanie: czy możliwy jest w tym układzie bezruch, tzn. czy istnieją w nim punkty, w których umieszczone ciało znikome pozostanie tam na zawsze? Warunkiem koniecznym bezruchu jest zerowanie się przyspieszenia ciała, zatem by odpowiedzieć na postawione pytanie, należy sprawdzić, czy istnieją takie punkty, w których wspomniane trzy przyspieszenia równoważą się.

Na odcinku między masami ciężkimi zawsze działają następujące przyspieszenia: ku masie cięższej równe $-(1-\mu)/(\mu+x)^2$, ku lżejszej równe $\mu/(1-\mu-x)^2$ i odśrodkowe $\omega^2 x$ równe w naszych jednostkach x. Czy ich suma

$$f(x) = -\frac{1-\mu}{(\mu+x)^2} + \frac{\mu}{(1-\mu-x)^2} + x$$

może gdziekolwiek być równa zeru? Otóż widać, że całkowite przyspieszenie w punktach bliskich ciału cięższemu może być dowolnie ujemne (bo skierowane jest w lewo, a pierwszy mianownik może być dowolnie bliski zera). Podobnie rozumując zauważamy, że w punktach bliskich ciału lżejszemu całkowite przyspieszenie może być dowolnie dodatnie (bo jest skierowane w prawo, a drugi mianownik może być dowolnie bliski zera). Funkcja $f(x)$ na tym odcinku jest niewątpliwie ciągła, zatem gdzieś między masami ciężkimi musi być punkt, w którym $f(x) = 0$. Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i uporządkowaniu dostajemy równanie algebraiczne piątego stopnia na niewiadomą x określającą położenie interesującego nas punktu. Nie potrafimy, co prawda, rozwiązania jawnie napisać, ale ono istnieje i można go szukać np. numerycznie. Tak znaleźliśmy (prawie) jeden punkt, w którym równoważą się trzy przyspieszenia; nazywa się on dlatego (od łac. *libra* – waga) punktem libracji (albo punktem Lagrange'a, ponieważ on pierwszy wskazał pięć takich punktów). W ramach ćwiczeń Czytelnik może sam udowodnić, że w prawo od masy μ i w lewo od $1-\mu$ na osi x istnieje jeszcze po jednym takim osobliwym punkcie, których położenia określone są również przez równania piątego stopnia. Jest to zresztą dość rzadki przypadek, by równanie piątego stopnia opisywało coś sensownego przyrodniczo. Te trzy tzw. liniowe punkty libracji oznaczane są tradycyjnie odpowiednio przez L_1, L_2 i L_3.

To nie wszystko. Otóż w płaszczyźnie orbit ciał ciężkich istnieją jeszcze dwa punkty libracji, mianowicie w wierzchołkach trójkątów równobocznych rozpiętych na odcinku łączącym ciała ciężkie. Zgadnąć tego chyba się nie da, ale sprawdzić jest bardzo łatwo. Ku masie cięższej działa przyspieszenie o wartości bezwzględnej $1-\mu$ i o składowych $(1-\mu)[-\cos 60°, -\sin 60°] = (1-\mu)[-1/2, -\sqrt{3}/2]$. Ku masie lżejszej działa przyspieszenie μ o składowych $\mu[\cos 60°, -\sin 60°] = \mu[1/2, -\sqrt{3}/2]$. Wreszcie przyspieszenie odśrodkowe ma taką wartość liczbową, ile wynosi (w naszych zmodyfikowanych jednostkach) odległość wierzchołka trójkąta od środka masy układu, zatem jego składowe to po prostu długości przyprostokątnych trójkąta, którego ta odległość jest przeciwprostokątną: $[1/2-\mu, \sqrt{3}/2]$. Suma tych trzech przyspieszeń rzeczywiście jest równa zeru. Tak sprawdziliśmy istnienie tzw. trójkątnych punktów libracji L_4 i L_5.

Czy przyroda wykorzystuje istnienie punktów libracji? Pisaliśmy już o tym w *Delcie*, co prawda dość dawno (*Delta* 7/1982), więc przypomnieć chyba można. Otóż każdy z liniowych punktów libracji ma tę własność, że dowolnie małe zaburzenie bezruchu spoczywającej w nim cząstki powoduje natychmiastowe i bezpowrotne oddalenie się jej z miejsca startu – mówimy, że liniowe punkty libracji są niestabilne. Tu więc natura nie jest w stanie niczego na stałe umieścić. Inaczej jest w punktach trójkątnych: cząstka lekko wytrącona z punktu trójkątnego ma szanse przez pewien czas wykonywać wokół niego ruch okresowy, jeżeli $\mu < 0,0385...$ Warunek ten jest spełniony np. dla układu Słońce-Jowisz, dlatego w pobliżu jego trójkątnych punktów libracji przebywa kilkanaście tzw. planetoid trojańskich, tj. nazwanych imionami bohaterów wojny trojańskiej. Podobnie podejrzewa się obecności tzw. pyłowych satelitów Ziemi w trójkątnych punktach libracji układu Ziemia-Księżyc. Wskutek nieuniknionych w rzeczywistej sytuacji zaburzeń ruchu ciała znikomego cząstki takie muszą wcześniej czy później opuścić sąsiedztwo swojego punktu libracji, za to na ich miejsce mogą przylecieć inne; w rezultacie w punktach trójkątnych ma prawo utrzymywać się stałe zgęszczenie drobnych cząstek, składające się z cząstek coraz to innych. Wprawdzie planetoidy trojańskie jeszcze nie pouciekały z miejsc stałego pobytu, ale cierpliwości...

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 646. W przestrzeni trójwymiarowej dane są cztery punkty nie leżące w jednej płaszczyźnie. Ile istnieje różnych równoległościanów, dla których każdy z tych punktów jest jednym z wierzchołków?
Rozwiązanie na str. 16

M 647. O dwóch liczbach rzeczywistych a, b wiadomo tyle, że nierówność $a\cos x + b\cos 3x > 1$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Wykazać, że $|b| \le 1$.
Rozwiązanie na str. 16

M 648. Nauczyciel napisał na tablicy trójmian kwadratowy $x^2+3x+15$. Następnie wszyscy uczniowie w klasie podchodzili kolejno do tablicy; każdy z nich zmniejszał albo zwiększał o jeden współczynnik przy x albo wyraz wolny trójmianu. Na koniec okazało się, że na tablicy widnieje trójmian $x^2+13x+5$. Czy jest prawdą, że w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian o pierwiastkach całkowitych?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Jarosław KULPA

F 343. Kierowca nieopatrznie zapomniał zaciągnąć hamulec swojego poloneza pozostawionego na stoku góry o kącie nachylenia $\alpha = 10°$. Jaką największą prędkość będzie mógł rozwinąć staczający się samochód?
Dane dotyczące poloneza: masa $m = 1200$ kg, moc silnika $P = 55$ kW, maksymalna prędkość na poziomej nawierzchni $v_{max} = 140$ km/h.
Rozwiązanie na str. 5

F 344. Piłeczka kauczukowa po czasie $t = 0,5$ sekundy spadła na podłogę. Odbiła się na wysokość $\eta = 0,9$ pierwotnej wysokości. Ile trwał cały ruch piłeczki aż do momentu zatrzymania?
Rozwiązanie na str. 5