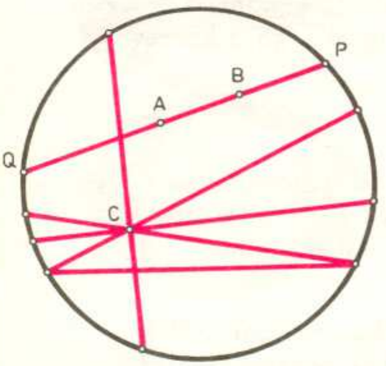
O dwóch modelach

Zdzisław POGODA

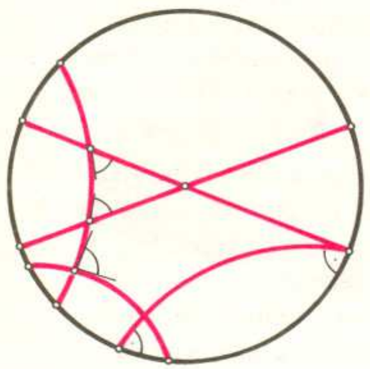
Gdy Janos Bolyai i Nikołaj Łobaczewski (którego 200. rocznicę urodzin właśnie obchodzimy) budowali podstawy geometrii nieeuklidesowej, jednym z najważniejszych zadań, z którym próbowali się uporać, było wykazanie niesprzeczności nowej teorii. Należało wykazać, że w geometrii nieeuklidesowej nie można znaleźć dwóch zdań wzajemnie sprzecznych. Niestety, ani Łobaczewski, ani Bolyai nie byli w stanie w pełni rozstrzygnąć tego problemu.



Rys. 1

Zagadnienie mogło być rozwiązane dopiero przez wskazanie odpowiedniego modelu geometrii nieeuklidesowej. Pierwszy taki model zaproponował w 1868 roku Beltrami. Jednakże najbardziej znane (i poglądowe) są dwa inne modele: model kołowy Kleina i, również w kole, model Poincarégo. Każdy z nich ma swoje wady, lecz także każdy ma szereg zalet. Przyjrzyjmy się im.

W modelu Kleina płaszczyznę stanowi wnętrze koła, a prostymi są cięciwy okręgu tegoż koła (rys. 1). Proste wyglądają euklidesowo, ale nic nie jest za darmo. Za ich euklidesowy kształt należy między innymi zapłacić w ten sposób, że euklidesowe, widziane przez nas, kąty między prostymi nie są kątami w geometrii nieeuklidesowej. Na przykład, dwie proste prostopadłe w tym modelu zazwyczaj nie będą reprezentowane przez prostopadłe cięciwy. Również, aby proste (a tym samym i płaszczyzna) były nieograniczone, odległość musi być określona w inny, bardziej specyficzny sposób. Przypomnijmy to określenie.



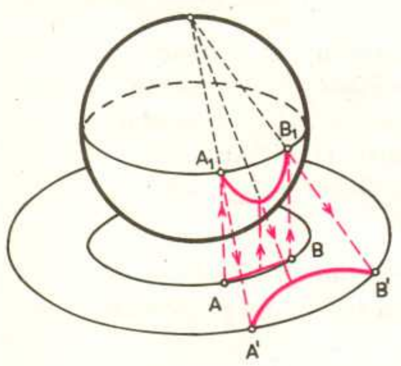
Rys. 2

Wybierzmy dwa punkty A i B, poprowadźmy cięciwę o końcach P, Q (przypominamy, nie należących do modelu) przechodzącą przez te punkty (porównaj rys. 1); odległość obliczamy według wzoru

$$d(A,B) = \ln\left(\frac{AP}{BP} : \frac{AQ}{BQ}\right).$$

Analizując tę formułę można się przekonać, że spełnia ona własności, których zazwyczaj oczekujemy od odległości. Jest to jednak odległość nieeuklidesowa. Na przykład dwie cięciwy o wspólnym końcu są w modelu prostymi równoległymi. Ponadto obliczana w ten sposób długość odcinka AP jest nieograniczona (wystarczy przeanalizować wzór, gdy B zbliża się do P); AP jest półprostą. Studiując własności modelu Kleina można wykazać, jak pewne zależności, które mają miejsce w geometrii euklidesowej, nie będą prawdziwe w przypadku nieeuklidesowym (np. pewnik o równoległych, porównaj rys. 1).

Drugi model, model Poincarégo, budowany jest podobnie. Płaszczyznę stanowi wnętrze koła, ale prostymi nie będą już cięciwy, tylko łuki okręgów prostopadłe do brzegu naszego koła oraz jego średnice. Tracąc euklidesowość prostych zyskujemy „wiernokątność"; kąty, jakie tworzą łuki modelujące proste, są kątami w geometrii nieeuklidesowej. W tym przypadku możemy zobaczyć i mierzyć zwykłym kątomierzem kąty nieeuklidesowe (rys. 2). Odległość określana jest podobnie jak w poprzednim modelu.



Rys. 3

Można wykazać, że jeden model da się otrzymać z drugiego wykorzystując odpowiednie rzutowania półsfery: prostokątne w przypadku modelu Kleina i stereograficzne w przypadku modelu Poincarégo. Idea przejścia od jednego modelu do drugiego przedstawiona jest na rysunku 3.

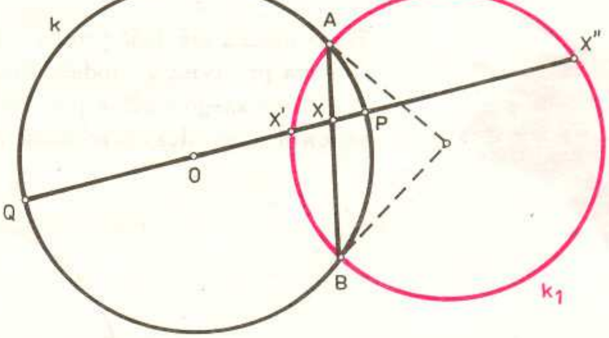
Odpowiednie własności tych rzutów pozwalają na formułowanie wniosków dotyczących obu modeli i geometrii nieeuklidesowej. Przy okazji dostajemy jeszcze jeden model geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego, na półsferze.

Istnieje inny ciekawy związek modelu Poincarégo z modelem Kleina, tym razem bez odwoływania się do przekształceń w przestrzeni. Związek ten jest prosty i ma jeszcze jedną zaletę: daje pewien przepis na mierzenie kątów w modelu Kleina przy wykorzystaniu modelu Poincarégo.

Niech k oznacza koło, wnętrze którego służy za model Kleina, punkt O niech będzie jego środkiem. Możemy zapisać w skrócie $k(O,r)$, gdzie r jest długością promienia. Każdemu punktowi X z modelu (czyli z wnętrza k) przyporządkujmy taki punkt X' leżący na promieniu wyznaczonym przez O i X, by

$$d(O,X') = \frac{1}{2} d(O,X),$$

gdzie $d(O,X')$ i $d(O,X)$ są nieeuklidesowymi długościami odcinków OX' i OX (rys. 4). Tak określone przekształcenie będzie przeprowadzało proste w modelu Kleina na proste w modelu Poincarégo zbudowanym we wnetrzu tego samego koła; model Kleina w kole $k(O,r)$ zostanie przekształcony na model Poincarégo w tym samym kole.



Rys. 4

Dla dowodu wybierzmy cięciwę AB reprezentującą prostą w modelu Kleina. Przetnijmy ją średnicą PQ. Punkt przecięcia tych odcinków oznaczmy przez X. Następnie przez punkty A i B poprowadźmy okrąg k_1 prostopadły do brzegu k. Środek tego okręgu znajdziemy prowadząc styczne do k w punktach A i B; punkt przecięcia tych stycznych będzie środkiem szukanego okręgu. Niech X' oznacza punkt otrzymany w wyniku przecięcia nowego okręgu ze średnicą PQ. Jak łatwo zauważyć, tak otrzymany punkt X' odpowiada punktowi X przy przejściu od modelu Kleina do modelu Poincarégo pokazanemu na rysunku 3 (z jedną drobną różnicą: koło z modelu Poincarégo zmniejszyliśmy tak, aby było tej samej wielkości co koło z modelu Kleina).

Wystarczy teraz wykazać, że właśnie dla tego punktu zachodzi równość $d(O,X') = \frac{1}{2} d(O,X)$.

Z definicji odległości d mamy

$$d(O,X) = \ln\left(\frac{OP}{OQ} : \frac{XP}{XQ}\right) = \ln\frac{XQ}{XP} = \ln\frac{r+OX}{r-OX}$$

oraz

$$d(O,X') = \ln\left(\frac{OP}{OQ} : \frac{X'P}{X'Q}\right) = \ln\frac{X'Q}{X'P} = \log\frac{r+OX'}{r-OX'}.$$

Przedłużmy jeszcze średnicę PQ tak, by otrzymać drugi punkt X'' na okręgu k_1. Nietrudno zauważyć, że

$$OX' \cdot OX'' = r^2$$

oraz z własności cięciw

$$QX \cdot XP = AX \cdot XB = X'X \cdot XX''$$

albo inaczej

$$(r+OX)(r-OX) = QX \cdot XP = X'X \cdot XX'' = (OX - OX')(OX'' - OX)\,.$$

I dalej

$$r^2 - OX^2 = (OX - OX')\left(\frac{r^2}{OX'} - OX\right) = OX \cdot \frac{r^2}{OX'} - r^2 - OX^2 + OX \cdot OX'\,,$$

skąd

$$OX = 2r^2 : \left(\frac{r^2}{OX'} + OX'\right) = \frac{2r^2OX'}{r^2 + OX'^2}\,.$$

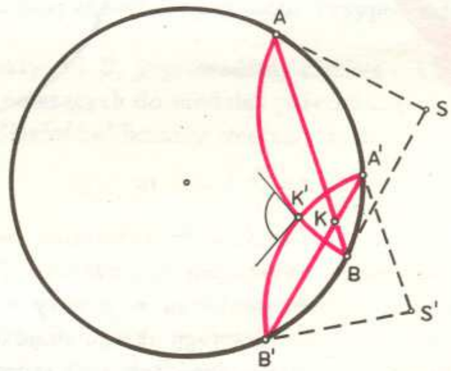
Ze związków tych dostaniemy

$$d(O,X) = \ln\frac{r+OX}{r-OX} = \ln\left[\left(r + \frac{2r^2OX'}{r^2+OX'^2}\right) : \left(r - \frac{2r^2OX'}{r^2+OX'^2}\right)\right] =$$

$$= \ln\frac{(r+OX')^2}{(r-OX')^2} = 2\ln\frac{r+OX'}{r-OX'} = 2d(O,X')\,,$$

a o to nam chodziło. Prosta z modelu Kleina przekształcana jest na prostą w modelu Poincarégo.

Teraz można już dość prosto otrzymać przepis na zmierzenie kąta między dwiema prostymi w modelu Kleina przechodząc do modelu Poincarégo konstruowanego według powyższego schematu w tym samym kole. Czytelnik zapewne sam odczyta schemat postępowania z przedstawionego rysunku.



Rys. 5

Funkcje wielokrotne

W 1985 roku Janusz Murakowski zdobył wyróżnienie w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki za pracę pt. *Funkcje wielokrotne*. Pomysł tej pracy jest bardzo ciekawy i nie został on do końca wyczerpany (praca liczyła kilka stron), więc przytoczymy go ponownie licząc na to, że jego autor będzie miał godnych następców. A oto ów pomysł.

Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie jakąś funkcją. Oczywiście, wiadomo, co to jest jej n-krotne złożenie $f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$. Można jednak wprowadzić też ułamkowe wielokrotności funkcji. Przez $f^{(1/n)}$ będziemy rozumieli taką funkcję, że jej n-krotne złożenie da funkcję f. Teraz już wiadomo, jak określić wymierne wielokrotności funkcji

$$f^{(m/n)} = f^{(1/n)} \circ f^{(1/n)} \circ \ldots \circ f^{(1/n)} \quad (m \text{ razy})\,,$$

a stąd krok do określenia rzeczywistych wielokrotności $f^{(a)}$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. No dobrze, ale nasuwają się od razu pytania ... My w tym momencie kończymy. Resztę pozostawiamy Czytelnikom.

Piotr HAJŁASZ