oraz z własności cięciw

$$QX \cdot XP = AX \cdot XB = X'X \cdot XX''$$

albo inaczej

$$(r+OX)(r-OX) = QX \cdot XP = X'X \cdot XX'' = (OX-OX')(OX''-OX)\,.$$

I dalej

$$r^2 - OX^2 = (OX-OX')\left(\frac{r^2}{OX'} - OX\right) = OX \cdot \frac{r^2}{OX'} - r^2 - OX^2 + OX \cdot OX'\,,$$

skąd

$$OX = 2r^2 : \left(\frac{r^2}{OX'} + OX'\right) = \frac{2r^2OX'}{r^2+OX'^2}\,.$$

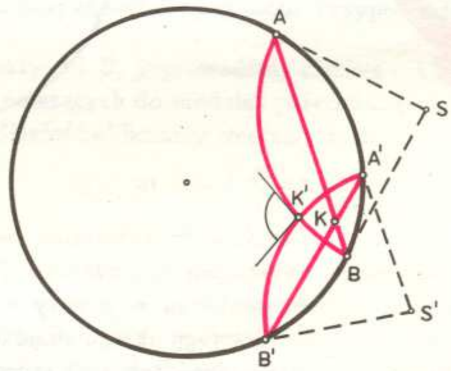
Ze związków tych dostaniemy

$$d(O,X) = \ln\frac{r+OX}{r-OX} = \ln\left[\left(r + \frac{2r^2OX'}{r^2+OX'^2}\right) : \left(r - \frac{2r^2OX'}{r^2+OX'^2}\right)\right] =$$

$$= \ln\frac{(r+OX')^2}{(r-OX')^2} = 2\ln\frac{r+OX'}{r-OX'} = 2d(O,X')\,,$$

a o to nam chodziło. Prosta z modelu Kleina przekształcana jest na prostą w modelu Poincarégo.

Teraz można już dość prosto otrzymać przepis na zmierzenie kąta między dwiema prostymi w modelu Kleina przechodząc do modelu Poincarégo konstruowanego według powyższego schematu w tym samym kole. Czytelnik zapewne sam odczyta schemat postępowania z przedstawionego rysunku.



Rys. 5

Funkcje wielokrotne

W 1985 roku Janusz Murakowski zdobył wyróżnienie w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki za pracę pt. *Funkcje wielokrotne.* Pomysł tej pracy jest bardzo ciekawy i nie został on do końca wyczerpany (praca liczyła kilka stron), więc przytoczymy go ponownie licząc na to, że jego autor będzie miał godnych następców. A oto ów pomysł.

Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie jakąś funkcją. Oczywiście, wiadomo, co to jest jej n-krotne złożenie $f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$. Można jednak wprowadzić też ułamkowe wielokrotności funkcji. Przez $f^{(1/n)}$ będziemy rozumieli taką funkcję, że jej n-krotne złożenie da funkcję f. Teraz już wiadomo, jak określić wymierne wielokrotności funkcji

$$f^{(m/n)} = f^{(1/n)} \circ f^{(1/n)} \circ \ldots \circ f^{(1/n)} \quad (m \text{ razy})\,,$$

a stąd krok do określenia rzeczywistych wielokrotności $f^{(a)}$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. No dobrze, ale nasuwają się od razu pytania ... My w tym momencie kończymy. Resztę pozostawiamy Czytelnikom.

Piotr HAJŁASZ