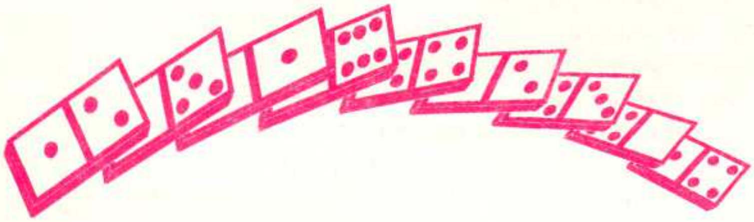
Indukcja matematyczna

Sławomir TOMASZEWSKI

Zasada indukcji ma dwie cechy, które stanowią o jej atrakcyjności: jasne, klarowne sformułowanie oraz dużą rozmaitość zastosowań.

Jej najbardziej przemawiającą do wyobraźni formą jest „zasada domina": gdy ustawimy kostki domina w rządek tak, że przewrócona poprzednia potrąca następną, to wystarczy popchnąć pierwszą, a przewrócą się wszystkie.



W matematyce jednak bardziej użyteczne jest następujące sformułowanie:
Jeśli dany jest ciąg zdań $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, o którym wiemy, że:
1) φ_1 jest prawdziwe,
2) prawdziwość φ_n pociąga prawdziwość φ_{n+1} (dla dowolnego n),
to wszystkie zdania w ciągu są prawdziwe.

Najczęściej zasadę indukcji stosujemy do dowodzenia wzorów (równań, nierówności) dotyczących liczb naturalnych.

Przykład 1.
Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ itd., tzn. p_n jest n-tą liczbą pierwszą. Wtedy $p_n > 3n$, dla $n \geq 12$.

Dowód. Wypiszmy dalsze liczby pierwsze: $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$, $p_{10} = 29$, $p_{11} = 31$, $p_{12} = 37$. A więc zdanie φ_1 oznacza, że $p_{12} = 37 > 3 \cdot 12 = 36$, co jest prawdą. Załóżmy więc, że zachodzi zdanie φ_{n-11}, tzn. $p_n > 3n$. Z tego wynika, że $p_n \geq 3n+1$. Musi być $p_{n+1} \geq p_n + 2$, bo $p_n + 1$ jest parzyste (a więc nie może być pierwsze, bo $p_n > 2$), a więc $p_{n+1} \geq (3n+1)+2 = 3n+3 = 3(n+1)$. Ale ta liczba jest z kolei podzielna przez 3 (i różna od 3), a więc nie może być pierwsza. Stąd wynika, że $p_{n+1} > 3(n+1)$, a więc zdanie φ_{n-10}. Zasada indukcji gwarantuje więc prawdziwość nierówności dla dowolnego $n \in N$, $n \geq 12$. ■

Dowodzony wzór może dotyczyć również innych obiektów, o ile występują w nim liczby naturalne (w roli parametrów).

Przykład 2.
Znając wzór na pochodną funkcji identycznościowej $f(x) = x$ oraz wzór na pochodną iloczynu wykażemy, że $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla dowolnego $n \in N$.

Dowód. Dla $n = 1$ mamy $(x)' = 1$, co stanowi wiedzę wyjściową. Dalej:
$(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)'x + x^n(x)' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n$.

Stefan Banach o swoim ojcu

Stefan Banach (jr) jest doktorem medycyny, specjalistą neurochirurgiem. W związku z obchodami setnej rocznicy urodzin jego ojca poprosiliśmy go o udzielenie wywiadu *Delcie*.

– Przeglądając różne opracowania biograficzne Pana ojca można się doszukać pewnych nieścisłości...

– Większość danych biograficznych dotyczących mojego ojca, które można gdzieś znaleźć, pochodzi ode mnie, lecz zanim zostały one zapisane, to niejednokrotnie ktoś coś zmienił, coś od siebie dodał i skutek jest taki, że w wielu miejscach są napisane po prostu fałszywe informacje. I tak na przykład mój ojciec urodził się 30 marca 1892 roku, a nie 20, jak jest w wielu miejscach podawane. Skąd się wziął ten błąd? Steinhaus kiedyś podczas przemówienia ku czci mojego ojca podał tę błędną datę, a inni za nim powtórzyli. Steinhaus podał też, że mój ojciec po urodzeniu został oddany na wychowanie do praczki nazwiskiem Banachowa, od której jakoby miał przez wdzięczność przybrać nazwisko. Jest to nieprawda. Owa praczka, do której został oddany na wychowanie, nazywała się Maria Płowa, natomiast nazwisko Banach jest nazwiskiem jego matki.

– Powiedział Pan, że pisze wspomnienia o ojcu. Czy mógłby Pan podać jakieś szczegóły?

– Owe wspomnienia są dopiero w stadium pisania. Chciałbym je ukończyć w ciągu roku, a jeśli chodzi o ich wydanie, to jak Bóg da.

– Znany jest fakt, że Pana ojciec będąc małym dzieckiem biegle władał językiem francuskim. Steinhaus pisze, że nie wiadomo, gdzie się go nauczył.

– Ależ wiadomo. Jak już zostało tutaj wspomniane, mój ojciec został oddany na wychowanie do Marii Płowej. Jej córka – starsza o 15 lat przybrana siostra Banacha – miała przyjaciela. Był nim krakowski fotograf Ludwik Mien. Był on Francuzem i rozmawiał z ojcem po francusku. Stąd owa biegła znajomość francuskiego. Na marginesie, Ludwik Mien specjalizował się w fotografowaniu dzieci i prawie wszystkie zachowane zdjęcia mojego ojca z dzieciństwa są jego autorstwa.

– Jakie warunki materialne miał Pana ojciec w dzieciństwie?

– Aby pomóc przybranej matce, zaczął udzielać korepetycji. Początkowo z różnych przedmiotów, potem ograniczył się do matematyki, a w końcu zaczął wyłącznie przygotowywać do matury. Z czasem przybrana matka i siostra – obie były praczkami – dorobiły się i otworzyły zakład pralniczy zatrudniający 15–20 osób. Oczywiście, poprawiły się wtedy warunki materialne mego ojca.

– Kiedyś, przy jakiejś okazji wspomniał Pan, że Pana ojciec tańczył jako student w operze.

– Będąc studentem dorabiał tańcząc za 20 halerzy mazura w drugiej parze w operze *Halka.* W innej natomiast operze niósł byka jako jeden z sześciu tragarzy.

– Czy interesował się sportem?

– Jako chłopak namiętnie grywał w piłkę nożną na Błoniach w Krakowie. W czasach studenckich bardzo chętnie grywał w bilard i był w tym bardzo dobry. Ale bilard był wówczas inny niż teraz. Nazywał się karambol, a czasami karambolka. Były tam tylko trzy bile. Teraz jest modny bilard amerykański. To coś zupełnie innego. Bardzo dobrze grał też w tenisa. A że był mańkutem, więc stanowiło to dodatkowe utrudnienie dla przeciwnika. Z mańkutem trudniej się gra, bo ma on inne zagrywki, niż te, do których jesteśmy przyzwyczajeni. Od niego nauczyłem się grać w tenisa.

Na marginesie, mimo że był mańkutem, to jednak pisał prawą ręką – wówczas wymagano w szkole, aby wszyscy pisali prawą ręką. Pisał prawą, ale kamieniami rzucał lewą – po tym zawsze można poznać mańkuta.

– Czy interesował się polityką? Jakie miał poglądy?

– Tak, interesował się. Gdybym jednak chciał dać panu krótką odpowiedź na drugie pytanie, to na pewno miałby pan błędne wyobrażenie o poglądach mego ojca. Sytuacja polityczna była wówczas na tyle złożona, że danie krótkiej odpowiedzi na to pytanie jest po prostu niemożliwe. Jedno mogę natomiast powiedzieć. Absolutnie nie był komunistą.

– Czy Pana ojciec odpowiadał powszechnym wyobrażeniom co do tego, jaki powinien być profesor uniwersytetu?

– Pamiętam, jak kiedyś przyszedł do gimnazjum na wywiadówkę. Moi koledzy byli zdziwieni, że nie ma on brody do pasa

Druga równość wynika ze wzoru na pochodną iloczynu, a trzecia – z założenia indukcyjnego. Powołanie się na zasadę indukcji kończy dowód. ■

Szczególnie ciekawe zastosowania indukcji to dowody twierdzeń, które nie mają postaci wzorów, a liczby naturalne nie występują w nich jawnie.

Przykład 3 – tym razem zadanie z geometrii.
Wykazać, że jeśli płaszczyznę podzielimy na części za pomocą prostych i okręgów, to można uzyskane obszary tak pomalować dwoma kolorami, by każde dwa z nich, graniczące ze sobą wzdłuż łuku bądź odcinka, miały różne kolory.

Dowód. „Ukrytym" parametrem naturalnym jest tutaj liczba prostych i okręgów tworzących podział. Gdy na płaszczyźnie dany jest jeden okrąg (bądź jedna prosta), to żądane pomalowanie łatwo uzyskać. Przypuśćmy, że dla danego n umiemy to zadanie rozwiązać i rozważmy płaszczyznę podzieloną przez $n+1$ linii (prostych lub okręgów). Gdy na chwilę „zapomnimy" o jednej z nich, uzyskamy n linii – tak uzyskany podział umiemy pomalować. Dokładając ostatnią linię wystarczy zmienić kolory obszarów po jednej jej stronie (na przeciwne), a zachować kolory po drugiej – i uzyskamy żądany efekt. ■

Teraz podamy przykład rozumowania indukcyjnego o szczególnie ciekawej strukturze: tutaj „kostka domina" wcale nie „potrąca" bezpośrednio następnej.

Przykład 4.
Wykażemy twierdzenie Cauchy'ego o średnich
$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\,, \quad \text{dla } a_1,a_2,\ldots,a_n \geq 0\,.$$

Dowód. Dla $n=1$ twierdzenie orzeka, że $a_1 \geq a_1$, w co można uwierzyć. Przypuśćmy, że nierówność Cauchy'ego jest prawdziwa dla pewnego n i dowolnego układu liczb $a_1,\ldots,a_n$. Wywnioskować stąd, że jest ona prawdziwa dla $n+1$, jest jednak dość trudno (proszę popróbować!). Zamiast tego zrobimy rzecz łatwiejszą: udowodnimy ją dla $2n$. W tym celu wykorzystamy znany przypadek szczególny ($n=2$). Jeśli $a,b\geq 0$, to
$$(*)\qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
(kto go nie zna, może udowodnić samodzielnie). Niech dane teraz będą liczby $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}\geq 0$. Wykażemy, że dla nich również zachodzi nierówność Cauchy'ego. Niech $a=\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$, $b=\dfrac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}$. Na mocy założenia indukcyjnego $a\geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$, $b\geq\sqrt[n]{a_{n+1}\cdot\ldots\cdot a_{2n}}$. Na mocy $(*)$:
$$\frac{a_1+\ldots+a_{2n}}{2n} = \frac{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\cdot b} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\,\sqrt[n]{a_{n+1}\cdot\ldots\cdot a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{2n}}\,,$$
co należało wykazać. Na mocy zasady indukcji udowodniliśmy nasze twierdzenie dla $n=1,2,4,8,\ldots,2^k,\ldots$ A co z pozostałymi wartościami? Okazuje się, że można się do nich cofnąć stosując specyficzną „indukcje wsteczną" (zwolennik postępu może powiedzieć „reakcyjną"). A więc, tym razem zakładamy naszą nierówność dla $n+1$ i udowodnimy ją dla n. W tym celu ustalmy

dowolne n liczb nieujemnych: $a_1, \ldots, a_n$. Niech $a_{n+1} = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$. Na mocy założenia

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} .$$

Stosując określenie a_{n+1}, po prostych przekształceniach, otrzymujemy

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) .$$

Po podzieleniu stronami przez $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ mamy

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^{n} \geq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n ,$$

co kończy dowód nierówności Cauchy'ego w tym przypadku, a więc i we wszystkich (indukcja). ■

Na zakończenie przedstawimy zastosowanie indukcji do dowodu pewnego bardzo zaskakującego twierdzenia. Pewni barbarzyńcy (tzn. ludzie nie znający zasady indukcji) mogą w nie nawet nie uwierzyć!

Przykład 5.
Wszystkie koty są tego samego koloru!

Dowód. Dla $n = 1$ kotów twierdzenie orzeka, że każdy kot jest takiego samego koloru jak on sam, co jest oczywiste. Zakładając teraz, że każdy n-elementowy zbiór kotów składa się z kotów o tym samym kolorze, weźmy pewien ich zbiór $n + 1$-elementowy. Usuwając z tego zbioru pewnego kota przekonamy się, że wszystkie pozostałe sa tego samego koloru (jest ich n, a więc pracuje założenie indukcyjne). Wystarczy się tylko przekonać, że ten usunięty jest również tego koloru. W tym celu dołączamy go z powrotem do zbioru, a usuwamy innego. Znów mamy n-elementowy zbiór, a więc znów na mocy założenia indukcyjnego widzimy, że poprzednio usunięty kot jest koloru pozostałych, bo razem utworzyły zbiór jednokolorowy. To kończy indukcję. A nasze twierdzenie wynika teraz z faktu, że liczba kotów na świecie jest skończona (choćby dlatego, że masa Ziemi jest skończona), a więc wyraża się pewną liczbą naturalną, do której dojdziemy w procesie indukcji. ■

Myślę, że powyższe przykłady przekonały Czytelnika do płodności zasady indukcji jako metody poznawczej i środka do rozwiązywania zadań, co skłoni Go do zastanowienia się nad następującymi zadaniami.

1) Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których każde dwie przecinają się, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt. Wykazać, że dzielą one płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ części.
2) Wykazać, że jeśli na płaszczyźnie danych jest n punktów nie leżących na jednej prostej, to wśród prostych łączących je jest co najmniej n różnych.
3) Udowodnić, że szachownicę o wymiarach $(4k + 1) \times (4k + 1)$ można obejść ruchem konika szachowego przechodząc przez każde pole jeden raz.
4) Na dworze króla Artura zebrało się $2n$ rycerzy, przy czym żaden z nich nie ma więcej niż $n - 1$ wrogów. Udowodnić, że Merlin – doradca Artura – może tak rozsadzić rycerzy przy Okrągłym Stole, by żaden z nich nie siedział obok swojego wroga.

i że nie jest trzęsącym się staruszkiem. Takie były wówczas wyobrażenia o tym, jak powinien wyglądać profesor uniwersytetu. A on przeciwnie, był młodym człowiekiem łamiącym różne przyjęte formy. W latach 30. było nie do pomyślenia, aby wyjść na ulicę w koszuli à la Słowacki, to znaczy rozpiętej pod szyją i z szeroko rozłożonym kołnierzykiem. Trzeba było mieć koszulę zapiętą pod szyją i mocno zaciągnięty krawat. Pod marynarką obowiązkowo musiała być kamizelka. Trzeba było też mieć rękawiczki, jeśli nie założone, to przynajmniej należało trzymać je w ręku. Ojciec złamał tę modę. Pamiętam, jak na przykład kiedyś wyszedł na ulicę w niemodnej wówczas koszuli z krótkim rękawem i z laską w ręku. Zaczęto później pomału odstępować od tych sztywnych rygorów odnośnie ubioru.

– Jak Państwo spędzali wakacje?

– Wakacje trwały dwa miesiące. Lipiec spędzałem na obozie harcerskim, sierpień zaś z rodzicami w Karpatach Wschodnich.

– Czy Pana ojciec zajmował się matematyką w czasie okupacji?

– Zajmował się matematyką codziennie prawie bez przerwy aż do końca życia. Także podczas okupacji. Miał olbrzymią podzielność uwagi. Mógł pracować w każdych warunkach. Bardzo chętnie w zgiełku kawiarnianym.

– Czy dużo mówił w domu o matematyce?

– Nie, nie mówił. Kiedy ja i mama kładliśmy się spać i był już spokój, to wtedy zabierał się do pracy i pracował do bardzo późna. Mniej więcej do trzeciej nad ranem.

Chciałbym jednak zaznaczyć, że miał zawsze dla mnie dużo czasu. Niedziele należały do mnie. W co drugą niedzielę chodziliśmy na mecze *Pogoni* lwowskiej, a gdy ta drużyna miała mecze wyjazdowe, to chodziliśmy do kina na filmy kowbojskie.

– Czy namawiał Pana do zajęcia się matematyką?

– Tak, namawiał, ale bardziej interesowała mnie humanistyka i nauki przyrodnicze. Zresztą, gdy z czasem w gimnazjum coraz lepiej poznawałem i rozumiałem matematykę, to w coraz większym stopniu zdawałem sobie sprawę, że nigdy nie osiągnę poziomu mojego ojca. Tak więc dosyć wcześnie wykrystalizowała się we mnie chęć pójścia na medycynę, a ojciec tego nie hamował. Uważał, że każdy powinien żyć z hobby.