epsilon

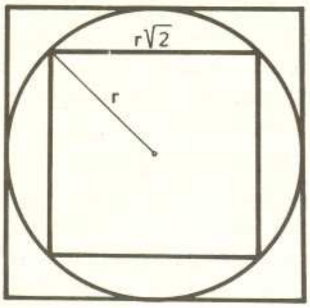
10/92
(20)

Pokrywamy płaszczyznę kwadratami

Mamy dany taki nieskończony ciąg liczbowy $\{r_n\}$, że $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \infty$; wykazać, że kołami o promieniach r_n można pokryć płaszczyznę.

Zadanie to pochodzi z jednej ze studenckich olimpiad matematycznych w ZSRR; poniżej przedstawimy piękne rozwiązanie, autorem którego jest A. Bachszecjan, pracownik Uniwersytetu w Erewaniu.

Na wstępie zauważmy, że teza zadania równoważna jest możliwości pokrycia płaszczyzny kwadratami o bokach r_n.



$(r\sqrt{2})^2 < \pi r^2 < (2r)^2 = 2(r\sqrt{2})^2$

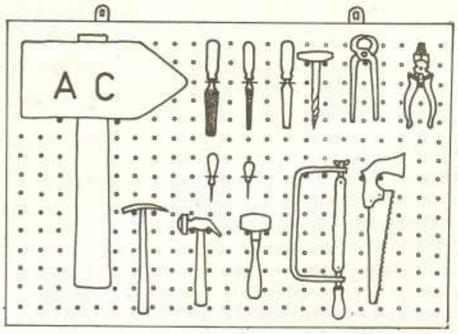
Rozpatrzymy dwa przypadki: albo istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $r_n \geq \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n, albo dla każdego $\varepsilon > 0$ można znaleźć tylko skończoną liczbę wskaźników n, dla których $r_n \geq \varepsilon$. W pierwszym przypadku teza jest oczywista; za pomocą nieskończenie wielu kwadratów o bokach równych ε można pokryć płaszczyznę, uda się więc to przy użyciu kwadratów większych. Zajmijmy się zatem drugim przypadkiem.

Możemy założyć, że $\{r_n\}$ jest ciągiem nierosnącym. Dlaczego? Weźmy dowolne i; promieni większych od r_i jest skończenie wiele, możemy je więc uporządkować od największego do najmniejszego. Postępując tak dalej, możemy ustawić promienie w ciąg monotoniczny.

Będziemy rozważać koła bez brzegów; jeśli nimi da się pokryć płaszczyznę, to i kołami domkniętymi też. Wybierzmy dowolny punkt O_1 na płaszczyźnie jako środek koła o promieniu r_1. Zbiór punktów nie należących do tego koła jest domknięty, istnieje zatem taki punkt O_2 nie należący do koła, że odległość dowolnego punktu spoza koła od O_1 jest nie mniejsza niż odległość O_1 od O_2 (oczywiście, będzie to dowolny punkt z okręgu). Po co wprowadzać punkt O_2 w taki sposób, a nie od razu brać element

W roku 1983 Międzynarodowy Kongres Matematyków odbywał się w Warszawie. Kilku matematyków zagranicznych ze zdziwieniem zauważyło nazwisko Banacha nad przednimi szybami niektórych tramwajów. Gdy poprosili gospodarzy o wyjaśnienie, dowiedzieli się, że istnieje w tym mieście ulica, nazwana imieniem Stefana Banacha. Koniecznie chcieli tę ulicę zobaczyć, udali się więc na nią odpowiednim tramwajem. Kiedy dotarli na miejsce, okazało się, że znajduje się tam sporej wielkości niezabudowany obszar. Stwierdzili wówczas zgodnie, że nie jest to „ulica Banacha", ale raczej „przestrzeń Banacha"...

Galeria Jednego Cytatu



– Aksjomat wyboru to potężne narzędzie...

(z wykładu dla studentów matematyki)

z brzegu? Bo w analogiczny sposób można rozumowanie powtarzać, konstruując kolejne koła i korzystając z tego, że ich suma jest zbiorem otwartym. W punkcie O_2 umieszczamy koło o promieniu r_2, a jako O_3 obieramy któryś z punktów spoza sumy dwóch kół o minimalnej odległości od O_1. I tak dalej...

Przypuśćmy, że po wykorzystaniu wszystkich r_n skonstruowana powyżej nieskończona suma kół nie pokryje całej płaszczyzny i weźmy punkt P nie należący do otrzymanej figury. Wówczas figura nasza zawiera się w kole o środku O_1 i promieniu $R + r_1$, gdzie R jest odległością O_1 od P. Rozważmy teraz koła o środkach w punktach O_n i promieniach $\frac{r_n}{2}$. Są one parami rozłączne; gdyby bowiem koła o numerach j i k miały punkt wspólny ($j < k$), to O_k należałoby do koła o środku O_j i promieniu r_j, co jest – na mocy konstrukcji – niemożliwe. Wobec tego suma pól mniejszych kół jest nie większa niż $\pi(R + r_1)^2$; ale z drugiej strony wynosi ona $\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^2}{4}$, czyli nieskończoność. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Wykazaliśmy, że jeśli mamy rodzinę kwadratów o nieskończonej sumie pól, to da się nimi pokryć płaszczyznę. A gdyby kwadraty zastąpić prostokątami? Odpowiemy na to w następnym *EPSILONIE*, niemniej jednak zachęcamy Czytelników do samodzielnego zmierzenia się z tym zadaniem.

Armen EDIGARIAN

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.