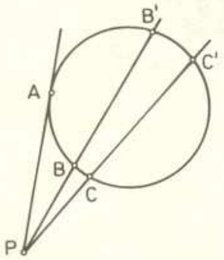
Potęga punktu względem okręgu

Kiedyś w programie szkoły podstawowej mieściły się następujące dwa twierdzenia: *jeżeli punkt P leży na zewnątrz okręgu o i prosta k jest do niego styczna w punkcie A, prosta l przecina go w punktach B i B', a prosta m przecina go w punktach C i C', to*

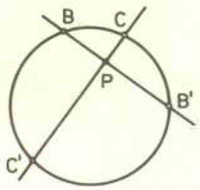
$$PA^2 = PB \cdot PB' = PC \cdot PC';$$

jeżeli punkt P leży wewnątrz okręgu o i prosta l przecina go w punktach B i B', a prosta m przecina go w punktach C i C', to

$$PB \cdot PB' = PC \cdot PC'.$$



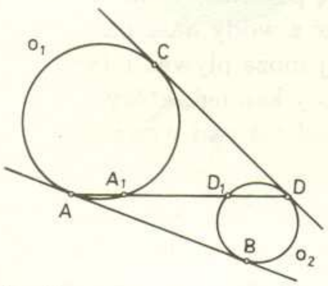
Rys. 1



Rys. 2

Dowieść tych twierdzeń jest łatwo, jeśli się tylko umie posługiwać pojęciem podobieństwa trójkątów (rysunki 1 i 2). Warto zwrócić uwagę, że otrzymana w każdym z tych przypadków liczba jest zależna tylko od okręgu i położenia punktu względem niego. Dlatego wprowadza się pojęcie potęgi punktu względem okręgu: jest to w przypadku punktu na zewnątrz właśnie ta liczba, o której mówi twierdzenie, a w przypadku punktu wewnątrz – minus ta liczba. W obu przypadkach jest to (jak łatwo obliczyć z twierdzenia Pitagorasa) różnica kwadratu odległości punktu od środka okręgu i kwadratu promienia okręgu. O potędze udowodniono wiele twierdzeń, wprowadzono pojęcia osi potęgowej i środka potęgowego, ale nawet nie wiedząc o potędze nic, poza tym, że istnieje, można – pamiętając o wspomnianych wyżej twierdzeniach – rozwiązać wiele zadań, które bez tego byłyby trudne.

Proponuję rozwiązanie pięciu zadań. Jeśli mimo wszystko będą trudności, można zajrzeć do wskazówek umieszczonych dalej.



Rys. 3

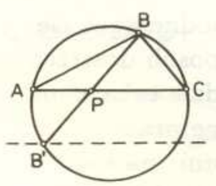
Zadanie 1. Prosta k jest zewnętrznie styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B, a prosta l – w punktach C i D. Odcinek AD przecina te okręgi odpowiednio w punktach A_1 i D_1 – rysunek 3. Wykazać, że $AA_1 = DD_1$.

Zadanie 2. Na boku AC trójkąta ABC skonstruować taki punkt P, by było $PA \cdot PC = PB^2$.

Zadanie 3. Dana jest prosta k i dwa punkty A i B po jej jednej stronie. Skonstruować okrąg styczny do k i przechodzący przez A i B.

Zadanie 4. Dany jest okrąg o i dwa leżące na zewnątrz niego punkty A i B. Skonstruować okrąg styczny do o i przechodzący przez A i B.

Zadanie 5. Punkty A i B leżą po przeciwnej stronie prostej k. Poprowadzić taki okrąg przechodzący przez A i B, który wycina na prostej k najkrótszą cięciwę.

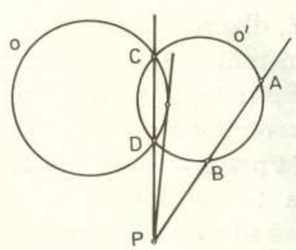


Rys. 4

Jerzy BEDNARCZUK

ad 1. Potęga A względem o_2 to $AD \cdot AD_1 = AB^2$. Potęga D względem o_1 to $DA \cdot DA_1 = DC^2$. Ponieważ $AB = CD$, więc $AD_1 = DA_1$, skąd mamy tezę.

ad 2. Odbijamy symetrycznie punkt B względem prostej AC i prowadzimy przez obraz prostą równoległą do AC. Jej przecięcie (obojętnie które) z okręgiem opisanym na ABC oznaczmy B'. Odcinek BB' przecina AC w poszukiwanym punkcie (rys. 4).



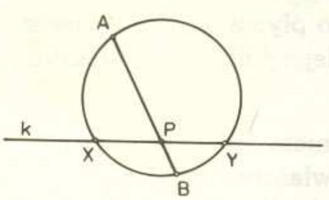
Rys. 5

ad 3. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej AB z k. Punkt styczności k z szukanym okręgiem jest odległy od P o $\sqrt{PA \cdot PB}$. Gdy prosta AB jest równoległa do k, łatwo jest wskazać rozwiązanie.

ad 4. Narysujmy jakiś okrąg o' przechodzący przez A i B oraz przecinający o. Oznaczmy punkty przecięcia o i o' przez C i D. Z punktu P przecięcia prostych AB i CD rysujemy styczną do o. Jej punkt Q styczności to trzeci (poza A i B) punkt szukanego okręgu. Jeśli ktoś ma wątpliwości, niech sprawdzi, że (rys. 5)

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PQ^2,$$

co dowodzi, że Q jest punktem styczności szukanego okręgu i o. A gdy P nie istnieje ?



Rys. 6

ad 5. Najkrótsza cięciwa to taka, że punkt P przecięcia AB z prostą k jest jej środkiem. Istotnie, dla dowolnego okręgu mamy (rys. 6)

$$\frac{1}{2}XY = \frac{1}{2}(PX + PY) \geq \sqrt{PX \cdot PY} = \sqrt{PA \cdot PB}$$

i równość ma miejsce tylko dla $PX = PY$. Okrąg taki ma środek w przecięciu symetralnej AB z prostopadłą do k w przechodzącą przez P.