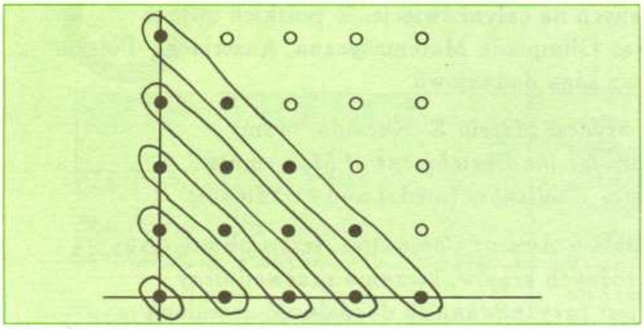
Popatrzeć geometrycznie

Edmund PUCZYŁOWSKI

Spójrzmy w ten sposób na sumę $1+2+\ldots+n$. Otrzymamy ją zliczając czarne punkty kolejno w „ukośnych" grupach na rysunku 1 (tutaj $n=5$).



Rys. 1

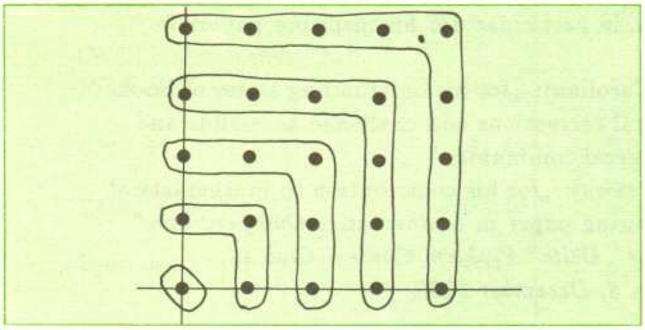
Dopełniających do kwadratu $n \times n$ kółek jest o n mniej. W efekcie

$$(1+2+\ldots+n)+[(1+2+\ldots+n)-n]=n^2,$$

skąd natychmiast wynika dobrze znany wzór

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

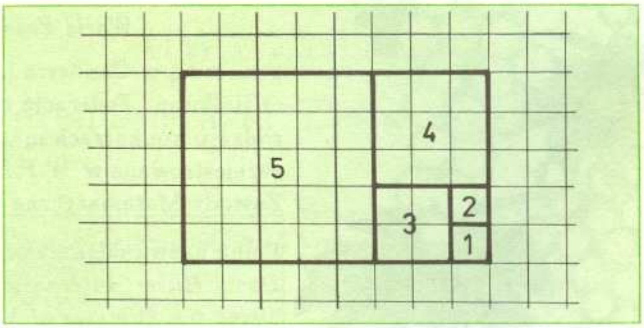
Jeszcze prościej oblicza się „geometrycznie" sumę $1+3+5+\ldots+(2n+1)$. Wystarczy tylko zauważyć, że sumę tę otrzymuje się licząc po kolei od kierunku południowo-zachodniego do północno-wschodniego punkty w paczkach zaznaczonych na rysunku 2 (tutaj też $n=5$) i że punkty te wypełniają kwadrat $n \times n$. Otrzymujemy $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.



Rys. 2

Ciąg $1,1,2,3,5,8,\ldots$ jest zbudowany w ten sposób, że – poczynając od miejsca trzeciego – każdy jego wyraz jest sumą dwóch bezpośrednio go poprzedzających, czyli $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$. Ciąg ten nazywa się ciągiem Fibonacciego i ma wiele interesujących własności. Jedną z nich odkryjemy.

Zauważmy, że sumę $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ możemy zinterpretować geometrycznie jako sumę pól kwadracików o bokach a_i ułożonych według schematu pokazanego na rysunku 3 (dla $n=5$ bok i-tego kwadracika jest równy a_i).



Rys. 3

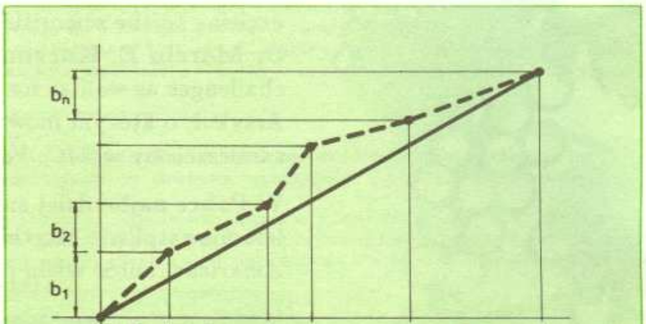
Kwadraciki te składają się na prostokąt o bokach a_n i $a_{n-1}+a_n=a_{n+1}$. Wynika stąd, że $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a_n \cdot a_{n+1}$.

Wykażemy teraz, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1,\ldots,a_n$ $b_1,\ldots,b_n$

$$(i)\quad \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2},$$

$$(ii)\quad \sqrt{(1-a_1)^2+a_2^2}+\sqrt{(1-a_2)^2+a_3^2}+\ldots+\sqrt{(1-a_{n-1})^2+a_n^2}+\sqrt{(1-a_n)^2+a_1^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

By wykazać nierówność (i), wystarczy zauważyć najpierw, że można założyć, iż wszystkie a_i, b_i są nieujemne, a następnie spojrzeć na rysunek 4 i przypomnieć sobie twierdzenie Pitagorasa oraz fakt, że łamana ma długość nie mniejszą niż odcinek łączący jej końce.

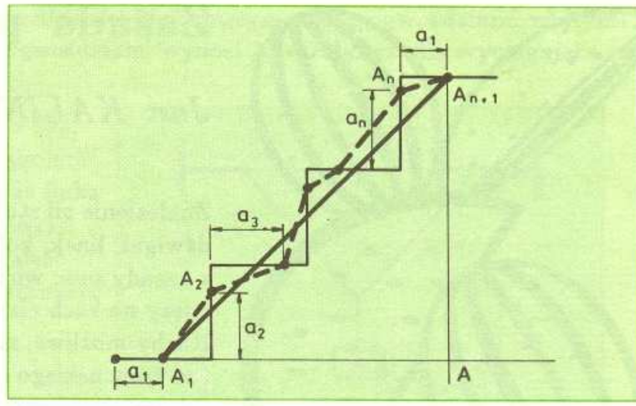


Rys. 4

Drugą nierówność uzyskać jest trudniej. Wygodnie jest zauważyć, że można ograniczyć rozważania do przypadku, gdy $0 \leq a_i \leq 1$. Wymaga to nieco więcej wysiłku niż redukcja w poprzednim przypadku. Można by też nie wykonywać redukcji, a uogólnić nieco dalsze rozumowanie oraz rozważyć oddzielnie przypadek n nieparzystego i parzystego. My założymy, że n jest parzyste podpowiadając, że drugi przypadek można, wykazując nieco sprytu, łatwo do tego sprowadzić.

Narysujmy łamaną (rys. 5) o $n+1$ bokach długości 1 i kolejno prostopadłych. Na bokach tej łamanej odłóżmy kolejno odcinki o długościach $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1$. Łącząc końce tych odcinków tak jak na rysunku 5 otrzymamy łamaną $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$, której długość jest równa lewej stronie nierówności (ii). Łamana ta ma długość nie mniejszą niż długość odcinka A_1A_{n+1}. Ta z kolei jest równa $\sqrt{(A_1A)^2+(AA_{n+1})^2}$. Zauważmy jednak, że odcinki A_1A i AA_{n+1} są oba równe $\frac{n}{2}$. W efekcie

$$\sqrt{(1-a_1)^2+a_2^2}+\sqrt{(1-a_2)^2+a_3^2}+\ldots+$$
$$+\sqrt{(1-a_{n-1})^2+a_n^2}+\sqrt{(1-a_n)^2+a_1^2}\geq$$
$$\geq\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{n^2}{4}}=\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$



Rys. 5

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 643. Na polach szachownicy 111×111 wpisujemy w dowolny sposób jedynki i minus jedynki, po jednej liczbie na każdym polu. Pod każdą kolumną zapisujemy iloczyn liczb stojących w kolumnie, obok każdego wiersza – iloczyn liczb stojących w tym wierszu. Otrzymane w ten sposób 222 liczby dodajemy. Udowodnić, że uzyskana suma jest niezerowa.
Rozwiązanie na str. 16

M 644. Na polach szachownicy 6×6 leży 18 nie zachodzących na siebie kostek domina (o wymiarach 2×1 każda). Wykazać, że niezależnie od sposobu ich ułożenia można jedną z poziomych lub pionowych linii oddzielających pola przeciąć szachownicę na dwie części tak, by nie przeciąć na pół żadnej kostki domina.
Rozwiązanie na str. 16

M 645. Mamy pewną liczbę 1992-cyfrową podzielną przez 9. Niech k oznacza sumę cyfr tej liczby, m niech będzie sumą cyfr liczby k, l zaś – sumą cyfr liczby m. Jakie wartości może przybierać l?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Jarosław KULPA

F 341. Pod jakim kątem w stosunku do pionu byłby widoczny z Warszawy satelita geostacjonarny nadający polskie programy i zawieszony nad równikiem na tej samej długości geograficznej co Warszawa. Promień Ziemi wynosi $R\approx 6400$ km.
Rozwiązanie na str. 12

F342. Do sprężynki przyłożono zmienne napięcie o częstotliwości ν. Obliczyć częstotliwość dźwięku, jaki zaczęła wydawać drgająca sprężynka.
Rozwiązanie na str. 12