Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 231 (WT=3,82) i 232 (WT=1,48)
z numeru 12/1991

Józef Siwy	– Łaziska Grn.	42,42
Henryk Kornacki	– Augustów	41,61
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,98
Janusz Olszewski	– Suwałki	38,69
Marek Prauza	– Poraj	38,65
Mirosław Matlęga	– Skoczów	38,46
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	36,49

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1992

Zadania z matematyki nr 245, 246

Redaguje Marcin E. KUCZMA

245. Dla dowolnego zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ złożonego z siedmiu różnych punktów płaszczyzny oznaczmy przez $\alpha(H)$ miarę największego kąta wypukłego $\angle P_iP_jP_k$ $(i, j, k \in \{1, \ldots, 7\})$. Obliczyć kres dolny wartości $\alpha(H)$, gdy H przebiega rodzinę wszystkich siedmiopunktowych podzbiorów płaszczyzny.

246. Wyznaczyć w zależności od stałych rzeczywistych a, b liczbę różnych pierwiastków rzeczywistych równania

$$x^4 - 2ax^2 + b^3x + a(a - b^2) = 0\,.$$

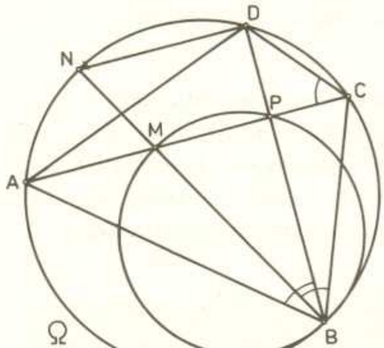
Zadanie **246** zaproponował pan Tadeusz Józefczyk z Poznania.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1992

Przypominamy treść zadań:

241. W okrąg Ω wpisano czworokąt $ABCD$, $|AD| \neq |CD|$. Na przekątnej AC znajdujemy taki punkt M, że $|\angle CBM| = |\angle ACD|$. Przez punkty B, M oraz punkt przecięcia przekątnych czworokąta prowadzimy okrąg. Dowieść, że jest on styczny do Ω.

242. W każdym wierzchołku trójkąta ABC umieszczamy liczbę 1. Obchodzimy kolejno wierzchołki pozostawiając w danym wierzchołku połowę liczby tam się znajdującej, drugą jej połowę dodając do liczby znajdującej się w następnym wierzchołku. Z otrzymanej tam sumy znów pozostawiamy połowę, resztę dodając do następnej liczby itd. Rozpoczynamy od wierzchołka A. Po n-krotnym obejściu trójkąta mamy w punkcie A liczbę a_n. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu (a_n).



241. Oznaczmy punkt przecięcia przekątnych przez P. Przedłużamy odcinek BM do przecięcia z okręgiem Ω w punkcie N. Ponieważ $|\angle CBN| = |\angle ACD| = |\angle ABD|$, zatem łuki CN i AD są równe. Stąd wynika, że odcinek DN jest równoległy do AC, a więc istnieje jednokładność o środku B, przeprowadzająca trójkąt BDN na BPM. Okrąg opisany na trójkącie BPM jest obrazem okręgu Ω w tej jednokładności; a skoro środek jednokładności leży na Ω, oba okręgi są styczne.

242. Niech b_n i c_n będą liczbami uzyskanymi w punktach B i C po n pełnych rundach. Oczywiście, $a_n + b_n + c_n = 3$. Runda $(n+1)$-sza ma przebieg następujący:

$$(a_n, b_n, c_n) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}a_n,\ \frac{1}{2}a_n + b_n,\ c_n\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}a_n,\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n,\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left(\frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n,\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n,\ \frac{1}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) =$$
$$=: (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}).$$

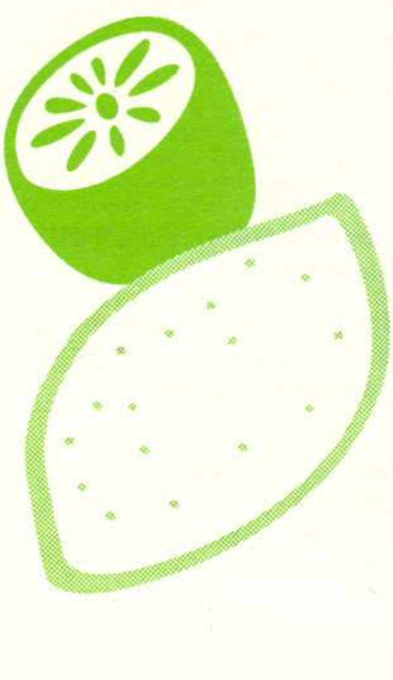
Widzimy, że $c_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$; w takim razie $c_n = a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}$ (dla $n \geq 1$). Stąd

$$a_{n+1} = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}(b_n + c_n) + \frac{1}{4}c_n =$$
$$= \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}(3 - a_n) + \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}\right) = \frac{3}{4} + \frac{5}{8}a_n - \frac{1}{8}a_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 1).$$

Podstawiając $a_n = \frac{3}{2} + x_n$ otrzymujemy zależność rekurencyjną

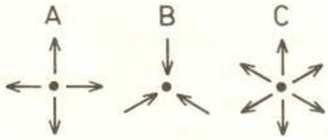
$$x_{n+1} = \frac{5}{8}x_n - \frac{1}{8}x_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 1); \qquad x_0 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{8}.$$

Łatwa indukcja pokazuje, że $|x_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ dla każdego n. Zatem $\lim x_n = 0$, czyli $\lim a_n = \frac{3}{2}$.



Zadania z fizyki nr. 143, 144

Redaguje Jerzy B. BROJAN



143. W dużym zbiorniku z wodą na dużej głębokości wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczono końcówki trzech rurek doprowadzających lub odprowadzających wodę jednakowo we wszystkich kierunkach (rys.). Wydajność źródła A wynosi $+1$ (w ustalonych jednostkach, np. kg/s), a wydajność źródła C wynosi $+2$. Jaka jest maksymalna wartość poboru wody przez rurkę B (o wydajności ujemnej), przy której czerpana woda będzie w całości pochodzić z C, bez domieszki z A? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny (niezmienny w czasie) i laminarny (bez zawirowań).

Rys. 1

Rys. 2

144. Kołysząc się na huśtawce dziecko może:
1. siedząc wysuwać nogi do przodu (prostować je) odchylając jednocześnie do tyłu górną część ciała, lub na odwrót – podkurczać nogi i pochylać tułów do przodu (rys. 1).
2. stojąc przykucać (rys.2) lub podnosić się do góry.
W których momentach dziecko powinno wykonywać opisane wyżej ruchy, aby rozkołysać się mocniej? Wyjaśnić fizyczne podstawy odpowiedzi. Czy ruchy te mogą wzbudzić kołysanie, gdy huśtawka początkowo spoczywała, czy tylko zwiększyć amplitudę wahań pchniętej huśtawki?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1992

Przypominamy treść zadań:

139. Na ekranie obserwujemy prążki powstałe w wyniku interferencji światła z dwóch niejednakowo silnych źródeł spójnych. Natężenie oświetlenia ekranu w środku prążków jasnych jest n razy większe niż natężenie oświetlenia w środku prążków ciemnych. Ile razy większe jest natężenie oświetlenia ekranu przez silniejsze źródło (gdy słabsze jest wyłączone) od natężenia oświetlenia przez słabsze (gdy silniejsze jest wyłączone)?

140. Prostopadłościenne naczynie ma szerokość a, a ciecz wypełnia je do wysokości b. Naczynie może się obracać swobodnie wokół osi O prostopadłej do płaszczyzny rysunku i leżącej w odległości h od dna oraz w odległości $\frac{a}{2}$ od ścianek bocznych. Jaki związek muszą spełniać wielkości a, b i h, aby przedstawione na rysunku poziome położenie naczynia było stabilne? Przyjąć, że masa samego naczynia jest pomijalnie mała w porównaniu do masy cieczy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 129 (WT=2,08) i 130 (WT=3,40) z numeru 12/1991

Paweł Perkowski	– Szczecin	38,66
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	27,54
Tomasz Wietecha	– Tarnów	21,31

Po ponad rocznej przerwie powrócił do Ligi p. Lipniacki.

139. Oznaczmy natężenie oświetlenia ekranu przez silniejsze źródło jako I_1, a przez słabsze – jako I_2. Wielkości te są proporcjonalne do kwadratów amplitud fal

$$I_1 = ka_1^2, \quad I_2 = ka_2^2,$$

gdzie k – stała proporcjonalności. Szukany stosunek $x = I_1/I_2$ jest więc równy

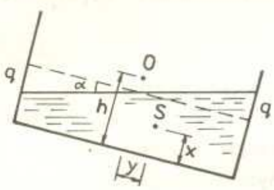
$$x = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2.$$

W środku prążków jasnych amplitudy się dodają (interferencja konstruktywna), a w środku prążków ciemnych – odejmują (interferencja destruktywna). Zatem dany stosunek n wyraża się przez amplitudy wzorem

$$n = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right)^2.$$

Przekształcenia algebraiczne dają rozwiązanie

$$x = \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)^2.$$



140. Rozważmy przechył naczynia o mały kąt α. Przekrój objętości cieczy przybiera przy tym kształt trapezu (rys.) o wysokości a i podstawach $b+q$ oraz $b-q$, gdzie $q = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Położenie środka masy S trapezu można znaleźć np. dzieląc trapez na prostokąt i trójkąt i znajdując najpierw położenia ich środków masy. W wyniku otrzymujemy

$$x = \frac{b}{2} + \frac{1}{6b}q^2 = \frac{b}{2} + \frac{a^2}{24b}\operatorname{tg}^2\alpha, \quad y = \frac{aq}{6b} = \frac{a^2}{12b}\operatorname{tg}\alpha.$$

Z bilansu energii wynika, że położenie poziome jest stabilne, gdy środek masy cieczy ulega podwyższeniu przy przechyle. Zatem wielkość

$$\Delta h = h - \frac{b}{2} - (h - x)\cos\alpha - y\sin\alpha$$

powinna być dodatnia dla małych α (wystarczy ograniczyć się do wyrazów kwadratowych w α). Podstawiając otrzymujemy

$$\Delta h \approx \frac{1}{2}\left(h - \frac{b}{2}\right)\alpha^2 - \frac{a^2}{24b}\alpha^2.$$

Stąd szukany warunek stabilności przybiera postać

$$h > \frac{b}{2} + \frac{a^2}{12b}.$$

Ten sam wynik uzyskamy rozpatrując przesunięcie **poziome** środka masy i moment siły ciężkości.