Kąty w okręgu

Każdy, kto choć trochę interesuje się geometrią, wie, że
(1) *kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.*

Dwa proste wnioski z tego twierdzenia pozwalają na szybkie rozwiązanie wielu ciekawych zadań geometrycznych. Pierwszy z nich to
(2) *kąt wpisany jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy jest oparty na półokręgu,*
co raczej dowodu nie wymaga. Kolejny to
(3) *kąty wpisane w ten sam okrąg przystają wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na przystających łukach*
– dla uzasadnienia należy tak obrócić jeden z łuków względem środka okręgu, by pokrył się z drugim.

A teraz siedem zadań demonstrujących przydatność powyższych spostrzeżeń. Pozostawiam Czytelnikom przyjemność ich rozwiązywania. Dla mających trudności podałem na końcu wskazówki.

Zadanie 1. Dany jest punkt P oraz okrąg o. Jaką figurę tworzą środki cięciw wyznaczonych na o przez proste przechodzące przez P ?

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli P, Q, R są spodkami wysokości trójkąta ostrokątnego ABC, to wysokości te leżą na dwusiecznych kątów trójkąta PQR.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli w trójkącie ABC boki AB i AC mają różne długości, to dwusieczna kąta BAC przecina symetralną BC w punkcie leżącym na okręgu opisanym na tym trójkącie.

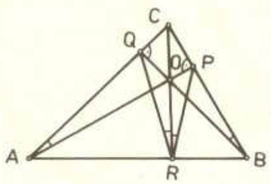
Zadanie 4. Skonstruować trójkąt ABC mając dane długości wysokości, środkowej i dwusiecznej poprowadzonych z wierzchołka A.

Zadanie 5. Prosta łącząca wierzchołek C trójkąta ABC ze środkiem S okręgu wpisanego w ten trójkąt przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie M ($M \neq C$). Wykazać, że $MS = MA$.

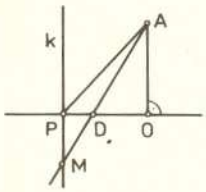
Zadanie 6. Punkty A i B leżą na okręgu o. Jaką figurę utworzą środki okręgów wpisanych w trójkąt ABC, gdy punkt C będzie „biegał" po okręgu o ?

Zadanie 7. Niech A, B i C będą punktami okręgu o i niech M będzie środkiem łuku AB tego okręgu, a N – środkiem łuku BC. Prosta MN przecina AB w punkcie P, a BC w punkcie Q. Wykazać, że $BP = BQ$.

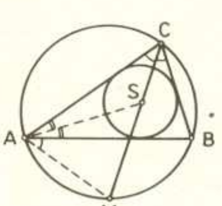
Jerzy BEDNARCZUK



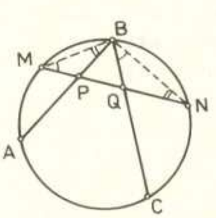
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

ad 1. Jeśli oznaczymy przez S środek okręgu, a przez X dowolny punkt szukanej figury, to określenie rozwartości kąta SXP nie powinno nastręczyć trudności. Otrzymujemy, jak widać, łuk okręgu o środku w połowie odcinka PS.

ad 2. Niech AP, BQ, CR będą wysokościami trójkąta ABC i niech się przecinają w punkcie O. Na każdym z czworokątów $ABPQ$, $AQOR$, $BPOR$ można (wobec (2)) opisać okrąg. Zaznaczone na rysunku 1 kąty okażą sie równe na mocy (1) w każdym z tych okręgów. (Jak zmodyfikować twierdzenie gdy trójkąt ABC nie jest ostrokątny?)

ad 3. Wystarczy zauważyć, że zarówno symetralna BC, jak i dwusieczna kąta BAC – tu korzystamy z (3) – dzielą łuk BC okręgu opisanego na trójkącie ABC – ten nie zawierający A – na połowy.

ad 4. Niech wysokość ma długość h, dwusieczna – d, a środkowa – s. Rysujemy trójkąt prostokątny AOD o przyprostokątnej $AO = h$ i przeciwprostokątnej $AD = d$ oraz trójkąt prostokątny AOP o przeciwprostokątnej $AP = s$ – oba po tej samej stronie prostej AO. Przedłużamy AD do przecięcia z prostą k równoległą do AO poprowadzoną przez punkt P – rysunek 2. Oznaczmy ten punkt przecięcia przez M, a przecięcie prostej k z symetralną odcinka AM przez Q. Okrąg o środku Q i promieniu QA przecina prostą OP w szukanych punktach B i C. Łatwo się o tym przekonać przyglądając się poprzedniemu zadaniu.

ad 5. Punkt S jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC. Wobec tego $\angle CAS = \angle BAS$ oraz $\angle ACM = \angle BCM = \angle BAM$ – ostatnia równość wynika z (2). Wobec tego $\angle ASM = \angle CAS + \angle ACS = \angle BAS + \angle BAM = \angle SAM$ – rysunek 3.

ad 6. Będą to zawarte wewnątrz o łuki okręgów przechodzących przez A i mające, odpowiednio, środki w środkach łuków, na które dzielą o punkty A i B – wystarczy spojrzeć na poprzednie zadanie.

ad 7. Wobec (3) $\angle BMN = \angle CBN$ oraz $\angle ABM = \angle BNM$ – rysunek 4. Stąd $\angle BPM = \angle BQN$, a więc $\angle BPQ = \angle BQP$.