epsilon

9/92

(19)

Opowieść z 1001 mocy

Moc jest to klasa równoważności
Zbioru w relacji równoliczności.
Dla zbiorów, co są w tej samej klasie
Zawsze bijekcję utworzyć da się.
Funkcja ta, która ma być bijekcją
Musi injekcją być i surjekcją.
Że jest injekcją, to w innych słowach
Znaczy, że jest różnowartościowa.
Nazwa „surjekcja" oznacza zdanie
Że jest to „na" zbiór odwzorowanie.
Zbiory bywają zwykle dzielone
Na te skończone i nieskończone.
Zwłaszcza te drugie nas zadziwiają
Bo całkiem inne własności mają.
Mówimy, że zbiór jest przeliczalny
Gdy ma moc zbioru liczb naturalnych.
Te zbiory liczb są z nim równoliczne:
Wymierne oraz algebraiczne.
Tę moc przebadał Cantor dopiero
I ją oznaczył przez $\aleph_0$.
Są jeszcze inne nieskończoności
Które niezwykłe mają własności.
No, bo na przykład, kto by powiedział
Że równej mocy jest każdy przedział?
Lub czy to fakt jest dość oczywisty
Że tyleż jest też liczb rzeczywistych?
Punktów na prostej? A i do tego
Podzbiorów zbioru przeliczalnego?
Moc tę continuum nazywamy
Oraz literą „c" oznaczamy.
Gdy większe chcemy uzyskać moce
Musimy liczbę 2 podnieść do c.
Tyle podzbiorów, co każdy przyzna
Ma zbiór $\mathbf{R}^2$ – czyli płaszczyzna.
Gdy 2 do mocy tej podniesiemy –
Kolejną, większą moc dostaniemy.
Czynność tę można kontynuować
I dalsze moce tak konstruować.
Tak otrzymamy ciąg nieskończony
Z coraz to większych mocy tworzony.
Więc można podać do wiadomości:
Jest nieskończoność nieskończoności!

Ludolfina

Nota bibliograficzna.
Wiersz powyższy został przez Ludolfinę przekazany Kołu Matematyków Studentów UJ jesienią 1984 roku. Nie wiadomo, kto ukrył się pod tym pseudonimem; nie wiadomo także, czy wiersz ten został przez Ludolfinę napisany, czy jedynie odnaleziony i udostępniony szerszemu gronu.

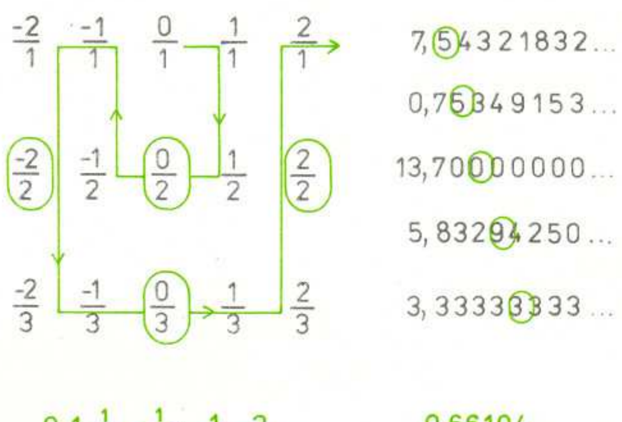
Czy istnieje łańcuch...

Zadanie:
Zbiór $P(\mathbf{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbf{N}$ jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania się. Czy istnieje w $P(\mathbf{N})$ łańcuch nieprzeliczalny?

Osobie, która nie miała do czynienia z teorią mnogości, należy w tym momencie wytłumaczyć kilka pojęć.

Co to jest łańcuch w zbiorze częściowo uporządkowanym $P(\mathbf{N})$? Jeśli rozważymy np. zbiory $\{1,2\}$ i $\{1,3\}$, to żaden z nich nie zawiera się w drugim; są one nieporównywalne. Łańcuch to taka rodzina Ł podzbiorów $\mathbf{N}$, że każde dwa zbiory $A, B \in$ Ł możemy porównać: $A \subset B$ lub $B \subset A$. Przykładem łańcucha jest: $\{\emptyset, \{1\}, \{1,7\}, \{1,7,8,100,1992\}\}$. Inny przykład to $\{\{2\}, \{2,4,6,8,10,...\}, \mathbf{N}\}$.

A zbiór nieprzeliczalny? Jest to zbiór, którego elementów nie da się ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi). Przeliczalne są np. zbiór liczb parzystych (ustawiamy: $2,4,6,8,10,\ldots$), zbiór liczb całkowitych (ustawiamy: $0,1,-1,2,-2,\ldots$), a nawet zbiór liczb wymiernych (należy ustawić te liczby w tabelce, gdzie w rzędach liczby mają te same mianowniki, w kolumnach zaś te same liczniki, po czym numerować „wężykiem", wykreślając te, które się powtórzą). Nie jest natomiast przeliczalnym zbiór liczb rzeczywistych (prowadzi się dowód nie wprost, którego myśl polega na ustawieniu wszystkich liczb rzeczywistych, zapisanych za pomocą rozwinięć dziesiętnych, w ciąg i skonstruowaniu liczby, która od n-tego wyrazu ciągu różni się na n-tym miejscu rozwinięcia).



W tej chwili wszystkie pojęcia potrzebne do zrozumienia tematu zadania są nam znane. Oczywiście, możemy bez kłopotu skonstruować w badanym zbiorze łańcuch nieskończony, np. $\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \ldots\}$. Ale czy istnieje tu łańcuch nieprzeliczalny?

Zadanie to dawałem wielu osobom i niejednej sprawiło ono sporo kłopotów. Zachęcam więc i Czytelników *EPSILONA* do spróbowania swoich sił. Jeśli komuś się uda i zechce nam przysłać szkic rozwiązania, redakcji *EPSILONA* będzie bardzo miło.

Krzysztof CIESIELSKI

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.