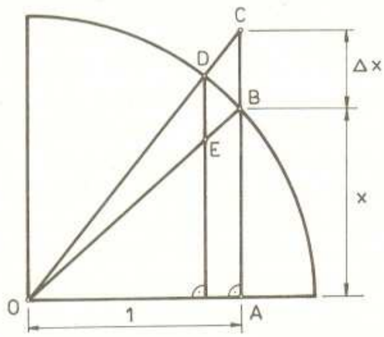
Jak obliczyć elementarnie pochodną $\operatorname{arctg} x$?

Zacznijmy od przypomnienia, co to jest $\operatorname{arctg} x$. Otóż dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jeden taki kąt $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, że $\operatorname{tg} \alpha = x$. Ten właśnie kąt oznaczamy przez $\operatorname{arctg} x$. Czyli, innymi słowy, $\operatorname{arctg} x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $\operatorname{tg} x$ określonej na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Przypomnijmy, jak się zwykle oblicza pochodną funkcji $\operatorname{arctg} x$. Najpierw obliczamy pochodną funkcji $\sin x$, potem $\cos x$, dalej pochodną ilorazu $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i w końcu pochodną $\operatorname{arctg} x$ jako pochodną funkcji odwrotnej. Okropność! Jakie to długie i skomplikowane.

Pokażemy, jak można obliczyć tę pochodną bezpośrednio geometrycznie. Poniższa metoda została podana przez Normana Schaumbergera. Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Zakładamy, że $x > 0$. Zauważmy, że z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OAB wynika, że promień okręgu jest równy $\sqrt{1+x^2}$.

Otóż

(♠) Pole $\triangle ODE <$ Pole wycinka $ODB <$ Pole $\triangle OCB$.

Oczywiście,

$$\text{Pole } \triangle OCB = \text{Pole } \triangle OCA - \text{Pole } \triangle OBA = \frac{\Delta x}{2}.$$

Trójkąty OCB i ODE są podobne, więc

$$\text{Pole } \triangle ODE = \left(\frac{OD}{OC}\right)^2 \cdot \text{Pole } \triangle OCB = \frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}.$$

Ponadto bezpośrednio z definicji arctg wynika, że $\angle BOA = \operatorname{arctg} x$ i $\angle COA = \operatorname{arctg}(x+\Delta x)$. Skąd

$$\text{Pole wycinka } ODB = \frac{1}{2}(1+x^2)(\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x).$$

Korzystając z (♠) otrzymamy

$$\frac{1}{1+(x+\Delta x)^2} < \frac{\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Przechodząc do granicy przy $\Delta x \to 0$ uzyskujemy wzór na pochodną

$$(\operatorname{arctg} x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Łatwo zauważyć, że dla $x < 0$ pochodna wyraża się tym samym wzorem. Wynika to z zauważenia, że $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$. A teraz zadanie dla Czytelników. Jak geometrycznie wyprowadzić wzory na pochodne innych funkcji cyklometrycznych?

Opracował Piotr HAJŁASZ

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (IV)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Czy długość jednego metra może wynosić pół metra?

Tomasz HOFMOKL

W moim cyklu artykułów opowiadam o doświadczeniach, których wyniki są na tyle zaskakujące, że zdają się przeczyć zdrowemu rozsądkowi. W tej konfrontacji przegrywa na ogół zdrowy rozsądek i jesteśmy zmuszeni do zmiany naszych poglądów na naturę zjawisk przyrodniczych.

Przypomnę, że w poprzednich opowieściach mówiłem o doświadczeniach wykazujących, że w układzie poruszającym się, na przykład w samolocie, czas płynie wolniej niż w układzie nieruchomym – na przykład na lotnisku. Okazało się również, że w próżni światło, a mówiąc ogólniej, fala elektromagnetyczna, porusza się ze stałą prędkością niezależną od prędkości źródła lub obserwatora. Mówiliśmy, że ta prędkość, równa w przybliżeniu trzystu tysiącom kilometrów na sekundę, jest największą prędkością, z jaką można przesyłać sygnał, informację.

Dziś w tytule artykułu mamy również prowokujący bezsens: czy metr może równać się połowie metra? I znowu okazuje się, że tak.

Rozpocznijmy naszą opowieść od początku bieżącego stulecia. Już w roku 1900 wiedziano, że atmosfera ziemska jest ośrodkiem przewodzącym ładunki elektryczne. Między innymi zauważono, że naładowany elektroskop (w najprostszej postaci są to dwa listki cynfolii na izolowanej pałeczce) po pewnym czasie rozładowuje się. W roku 1912 V. F. Hess wykazał obserwacyjnie, że przewodnictwo atmosfery wzrasta wraz z wysokością. Im wyżej umieścimy naładowany elektroskop, tym szybciej się rozładuje. Przewodnictwo atmosfery zależy od stopnia zjonizowania jej atomów. Znaczy to, że im wyżej, tym częściej spotykamy atomy pozbawione jednego lub kilku elektronów, a tym samym naładowane elektrycznie. Przyczyną może być jakiś czynnik zewnętrzny, który obdziera atomy z elektronów. Hess wysunął hipotezę, że istnieje jakieś pozaziemskie promieniowanie przychodzące do nas z głębin Wszechświata, które obdziera atomy z elektronów, a mówiąc bardziej fachowym językiem, jonizuje atomy. Promieniowanie to nazwano promieniowaniem kosmicznym. Dziś wiemy, że w pobliżu Ziemi ponad atmosferą promieniowanie to składa się w 86% z protonów, czyli jąder wodoru, a w 13% z jąder helu, pozostały 1% to elektrony i jądra cięższych pierwiastków. Jest to tak zwane promieniowanie pierwotne. Strumienie bardzo szybkich cząstek nadlatujące z głębin kosmosu wpadają w atmosferę ziemską i zderzają się z jej atomami. Każde zderzenie to mikrowybuch, w którym powstają różne cząstki, z których część ma stosunkowo bardzo krótki żywot. Strumienie powstałych cząstek, czyli tzw. wtórne promieniowanie kosmiczne, dociera do powierzchni Ziemi, a nawet wnika dość głęboko pod powierzchnię. Tak, tak, w każdej sekundzie przez nasze ciało przenikają niewidzialne cząstki powstałe w górnych warstwach atmosfery.

Bohaterem naszego opowiadania będzie cząstka około dwustu razy cięższa od elektronu, która może być naładowana albo dodatnio, albo ujemnie. Nosi ona nazwę mionu dodatniego lub mionu ujemnego. Odznacza się dużą nietrwałością, bo – jak wykazały badania – żyje w spoczynku tylko dwie milionowe części sekundy. Zauważyli Państwo, że powiedziałem, iż żyje w spoczynku dwie milionowe części sekundy. Wiemy już bowiem, że w szybkim ruchu może żyć dłużej. Chwaliłem się poprzednim razem, że ja w układzie odległego kwazara, od którego Ziemia oddala się z ogromną prędkością, liczę sobie prawie sto pięćdziesiąt lat. Otóż prześledźmy dzieje mionu od powstania do rozpadu z dwóch punktów widzenia: raz patrząc na mion z pozycji eksperymentatora na Ziemi, a drugi raz, i to jest trudniejsze do zrealizowania, z pozycji obserwatora lecącego razem z mionem w kierunku Ziemi.

Najpierw rozważmy pierwszy punkt widzenia. To, co opowiadam, jest wynikiem szeregu doświadczeń. Stwierdzono ponad wszelką wątpliwość, że miony powstają w górnych warstwach atmosfery, gdzieś na wysokości 15 km. Mogą one mieć bardzo dużą energię i w pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć, że poruszają się z prędkością bliską prędkości światła. Czas życia każdej cząstki ma sens tylko statystyczny. Nie umiemy przewidzieć, że ten konkretny mion będzie żył właśnie dwie milionowe części sekundy. Może właśnie rozpadnie się po milionowej części sekundy, a może będzie żył dwa razy dłużej. Jedyne,

Teoria spadania

Andrzej MAJHOFER

Pierwsza podróż Kolumba „do Ameryki" w 1492 roku uważana jest za wydarzenie zamykające średniowiecze. Po tej dacie nastąpiła epoka nowożytna. Data jest, oczywiście, przyjęta dosyć umownie, trudno jednak nie zauważyć, że w wieku XVI i następnych dokonuje się bardzo dynamiczny rozwój cywilizacji – pojawiają się nowe idee, całkowicie odmienne od przekonań powszechnie przyjmowanych przez całe poprzednie tysiąclecie, a z nimi i nowożytna nauka.

Fizycy tradycyjnie przyjmują, że w ich dziedzinie przełom nastąpił dzięki działalności Galileusza. Zadecydowały o tym nie tyle jego liczne szczegółowe odkrycia, ile zastosowana metoda. Galileusz odwołuje się w swoich pracach do wyników doświadczeń, a swoje obserwacje i wnioski wyraża stosując pojęcia matematyczne. Matematyka nie jest jednak dla niego jedynie językiem zapisywania wyników, ale przede wszystkim metodą analizy doświadczeń. Galileusz jako pierwszy zdał sobie sprawę, że nie ma sensu teoria fizyczna nie odwołująca się do doświadczenia, a także, że praca doświadczalna nie poddawana analizie teoretycznej jest całkowicie bezwartościowa – tak, jak najdokładniejsze tablice wartości funkcji nie zastąpią twierdzeń analizy matematycznej.

Dobrym przykładem jest tu sformułowanie praw spadku swobodnego. Wielu historyków zarzuca Galileuszowi, że zapewne nie wykonał doświadczeń, na które się powołuje, gdy twierdzi, że wszystkie ciała spadają jednakowo. Istotnie, w czasach Galileusza każde bezpośrednie doświadczenie musiało dać wynik sprzeczny z tym twierdzeniem – nie było przecież wówczas wystarczająco wydajnych pomp próżniowych.

A jednak wniosek Galileusza był wnioskiem „doświadczalnym". Rozumowanie jego przebiegało mniej więcej tak (podaję „wersję współczesną"; proszę więc wybaczyć, jeśli zdarzy mi się użyć pojęć, które pojawiły się o wiele później). Najpierw wykazuje wewnętrzną sprzeczność poglądu głoszonego za Arystotelesem przez ówczesnych filozofów, że ciało większe spada szybciej niż ciało mniejsze. Zaczyna od ciał z tego samego materiału. Załóżmy, że, istotnie, duży kamień spada szybciej niż mały. Jeśli tak, to po ich połączeniu powinny spadać z prędkością pośrednią, mniejszą niż prędkość dużego i większą niż małego – wszak ciało szybsze „pociągałoby" wolniejsze, a wolniejsze „hamowało" szybsze. Połączone kamienie są jednak razem większe niż większy z nich, a więc zgodnie z założeniem spadają szybciej niż każdy oddzielnie. Otrzymujemy sprzeczność, a więc twierdzenie Arystotelesa jest błędne. Obserwowane różnice w szybkości spadania różnych ciał nie mogą wynikać z „natury" spadania, a spowodowane są innymi przyczynami – np. oporem powietrza. Porównanie spadania ciał z różnych materiałów wymaga „wyeliminowania" oporu powietrza.

Dodatkowo, ponieważ obserwowane różnice czasów mogą być bardzo małe, Galileusz proponuje używanie równi pochyłej dla „rozciągnięcia" doświadczeń w czasie. Równia wprowadza jednak dodatkowe opory: tarcie o deskę. Jako dalsze ulepszenie Galileusz proponuje zastosowanie wahadła, w którym „spadające ciało" zawieszone jest na długiej nici. Teraz rozumowanie jest już proste: porównujemy ruch wahadeł o identycznej długości z „ciężarkami" wykonanymi z różnych materiałów. Opór powietrza będzie powodował różne tempo zanikania amplitudy, natomiast „czas spadania" będziemy obserwowali jako okres wahań. Uruchamiając jednocześnie dwa takie wahadła możemy bardzo precyzyjnie porównać ich okresy obserwując różnice faz po kilkudziesięciu lub nawet kilkuset wahnięciach – by, jak stwierdza Galileusz, nie zaobserwować najmniejszej między nimi różnicy. Jak bowiem zauważył Galileusz, okres drgań wahadła zależy jedynie od jego długości (nie jest to stwierdzenie całkiem ścisłe).

Wniosek: po wyeliminowaniu oporów ruchu wszystkie ciała spadają z jednakową szybkością.

Sformułowane przez Galileusza twierdzenie dotyczące spadania ciał było tym samym jednym z pierwszych przewidywań teoretycznych w pełni później potwierdzonym w niezliczonych doświadczeniach wykonywanych na tysiącach lekcji fizyki.

Sens przełomu dokonanego przez Galileusza polegał na dostrzeżeniu głębokiego związku między poznaniem „bezpośrednim", tj. doświadczalnym a teoretycznym, dodatkową zaś korzyścią było wynalezienie zegara wahadłowego (skonstruowanego nieco później przez Christiana Huygensa) – do początków XX wieku najprecyzyjniejszego przyrządu do pomiaru czasu. Wróćmy jednak do problemu spadku swobodnego. Czy rzeczywiście „różne ciała spadają jednakowo"? Wiele lat po śmierci Galileusza, po sformułowaniu przez Newtona praw dynamiki i prawa powszechnego ciążenia i tym samym ogromnym udoskonaleniu „aparatury pojęciowej" zdano sobie sprawę, że w rozumowaniu Galileusza, w części dotyczącej „ciał z różnych materiałów" ukryte jest założenie (przyjęte również przez Newtona i jego następców), iż „masa bezwładna" i „masa grawitacyjna" ciała są równe. Jeśli jednak dokładniej przeanalizować te pojęcia i „przepisy" na mierzenie obu mas, to okazuje się, że w zasadzie mogłyby to być wielkości zupełnie niezależne. „Masę bezwładną" moglibyśmy wyznaczać badając stosunek prędkości po zderzeniu z pewnym ciałem wzorcowym; „masa grawitacyjna" natomiast jest proporcjonalna do siły, z jaką Ziemia przyciąga dane ciało – są to więc wielkości istotnie różne. Zdawał sobie z tego sprawę już Newton i próbował wykazać, że bezwładność jest wynikiem przyciągania grawitacyjnego przez „resztę Wszechświata". Albert Einstein natomiast przyjął, że równość obu mas jest ogólnie prawdziwym prawem Przyrody i zbadał dokładnie konsekwencje takiego założenia. Posłużył się przy tym metodą identyczną, jak Galileusz niemal trzysta lat wcześniej: dokonał szczegółowej analizy możliwych wyników doświadczeń przeprowadzonych w „spadającej windzie". Doszedł przy tym do wniosku, że żadne doświadczenia w „zamkniętej windzie" nie pozwoliłyby odróżnić, czy nieruchoma winda znajduje się w zewnętrznym, jednorodnym polu grawitacyjnym, czy też porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Twierdzenie to stoi u podstaw ogólnej teorii względności, a z nią i całej współczesnej kosmologii. Nic dziwnego, że równość masy bezwładnej i grawitacyjnej jest też coraz dokładniej sprawdzana doświadczalnie – jak dotąd nie ma wystarczających podstaw, aby w nią wątpić. Badania rozpoczęte przez Galileusza nie są zakończone: ogólna teoria względności ma zupełnie inną postać niż teorie pozostałych oddziaływań elementarnych. Wiadomo, że uwzględnienie zjawisk kwantowych wymaga daleko idącej zmiany teorii – jak jednak ma ona wyglądać – nie udaje się ustalić już od lat kilkudziesięciu.

Twierdzenie Galileusza, że okres drgań wahadła nie zależy od amplitudy ruchu, nie jest ścisłe. Okres wahań rośnie wraz z amplitudą. Dla małych wychyleń poprawki do „szkolnego wzoru" $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ są jednak bardzo małe i przy stosowaniu wahadła o długości kilku metrów i niewielkich wychyleń byłyby (w czasach Galileusza) całkowicie pomijalne (okres wydłuża się o mniej niż 0,2%, gdy amplituda wynosi 10°). Ściśle biorąc, stosując wahadło Galileusz nie wyeliminowałby również całkiem wpływu oporu powietrza. Występowanie siły oporu (np. proporcjonalnej do prędkości) zmienia bowiem okres drgań w stosunku do ruchu bez oporu. Poprawki te, w przypadku ruchu w powietrzu są tak małe, że można je pominąć w porównaniu z poprawkami związanymi z zależnością od amplitudy drgań.

co możemy twierdzić, to to, że średnio miony żyją dwie milionowe części sekundy. Dla uproszczenia rozważajmy więc taki średni mion. Patrząc z Ziemi i rozumując zgodnie z fizyką Newtona, czyli zgodnie ze zdrowym rozsądkiem, możemy przeprowadzić następujące obliczenie. Mion, ten nasz średni, przez czas swego życia przeleci, nawet z prędkością światła, dwie milionowe części sekundy razy trzysta tysięcy kilometrów na sekundę, czyli sześćset metrów. Nasuwa się nieodparcie wniosek: miony powstające piętnaście kilometrów nad powierzchnią Ziemi nie mają żadnej szansy na dotarcie do poziomu morza, bo przedtem rozpadną się. Przeprowadzamy doświadczenie z licznikami umieszczonymi na poziomie morza i stwierdzamy, że mnóstwo mionów jednak dociera do powierzchni Ziemi. Wynik zaskakujący, czyżby znowu sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem? Dla nas już nie – wiemy bowiem, że czas w szybkim ruchu płynie wolniej. Zakładając dość rozsądną wartość prędkości mionu równą 0,99876 prędkości światła okaże się, że przy tej prędkości mion żyje dwadzieścia osiem razy dłużej niż mion w spoczynku, a więc będzie mógł przebyć nawet 18 km. Nie ma więc żadnego problemu? Czy aby na pewno?

Popatrzmy teraz na ten sam proces powstania, lotu i rozpadu mionu z punktu widzenia obserwatora, który leci razem z mionem. Względem obserwatora mion jest teraz w spoczynku. Żyje więc tylko dwie milionowe części sekundy. Może więc przebyć w czasie swego życia co najwyżej 600 metrów. Czyli nie może dotrzeć do naszej aparatury badawczej na powierzchni morza, do której, jak przypominam, ma 15 km. A jednak dociera do aparatury, bo na to wskazuje doświadczenie. Co więcej, dopiero co zrozumieliśmy, że powinien tam dotrzeć z punktu widzenia obserwatora na Ziemi. Obserwator pędzący razem z mionem zdaje się twierdzić co innego. Znowu sprzeczność ze zdrowym rozsądkiem. Tak, ale tylko dopóty, dopóki nie wyjawimy jeszcze jednego przewidywania szczególnej teorii względności. Twierdzi ona mianowicie, że długość poruszającego się przedmiotu ulega skróceniu w kierunku ruchu. Obserwator związany z mionem widzi pędzącą naprzeciw Ziemię. Odległość do Ziemi będzie więc mniejsza, bo Ziemia jest w ruchu. Dokładne obliczenia w naszym przypadku mówią, że ta odległość wynosi tylko 528 metrów zamiast 15 kilometrów. Mion tę odległość przebędzie bez trudu. Sprzeczność jest usunięta. Zdrowy rozsądek uratowany, ale za cenę przyjęcia szczególnej teorii względności.

Dla niektórych z nas cena to duża. Musieliśmy bowiem zgodzić się, że czas nie ma znaczenia absolutnego, że to samo dotyczy długości: pręt o długości metra widziany z bardzo szybko poruszającego się obiektu może mieć długość tylko pół metra. Taki efekt zauważymy pędząc już z prędkością równą 0,865 prędkości światła.

Nasuwa się pytanie, czy jest coś, co nie zmienia się z prędkością. Może masa albo ładunek elektryczny? Okazuje się, że ten ostatni nie zależy od prędkości i bardzo łatwo to wykazać doświadczalnie. Otóż dowodem na to jest doskonała obojętność elektryczna zwykłej materii. Elektrony są bardziej ruchliwe niż protony. W każdym pierwiastku inny jest ruch elektronów. Gdyby ładunek zależał od prędkości, materia nie mogłaby być obojętna elektrycznie. Uff, przynajmniej ładunek nie zależy od prędkości, mówimy, że jest niezmiennikiem. A może i masa ciała nie zależy od prędkości? Znowu trzeba „zapytać się" doświadczenia. Użyjemy do tego wiązki elektronów. Są one naładowane ujemnie i w ruchu mogą się odchylać zarówno pod wpływem pola elektrycznego, jak i pola magnetycznego. Pola te działają w różny sposób na poruszający się elektron. Okazało się, że porównując odchylenia w jednym i drugim polu można wyznaczyć stosunek ładunku cząstki do jej masy. Wiemy już, że ładunek cząstki nie zależy od prędkości, łatwo więc sprawdzimy, czy masa zależy od prędkości poruszania się. Przyznają Państwo, że zaskakuje sama możliwość takiej zależności, ale lepiej sprawdzić.

Pierwszy takie doświadczenie wykonał w 1901 roku W. Kaufman, ale opowiem o znacznie dokładniejszych pomiarach z 1908 roku wykonanych przez A. H. Bucherera. Zmieniał on prędkość wiązki elektronów od 0,3 prędkości światła do 0,69 prędkości światła i za każdym razem z odchylenia w polu elektrycznym i magnetycznym wyznaczał stosunek ładunku do masy elektronu. Stosunek ten nawet w żargonie fizycznym nazywa się „e do em". Przypominam: ładunek elektryczny nie zależy od prędkości ruchu. Jeżeli więc masa jest stała, to i cały stosunek nie powinien zależeć od prędkości. Tymczasem okazało się, że ten stosunek maleje wraz ze wzrostem prędkości elektronów. Przy najmniejszej prędkości 0,32c wynosił 1,66, a przy prędkości 0,69c już tylko 1,28. Co to znaczy? A tylko tyle, że masa elektronu rośnie wraz ze wzrostem prędkości. Oczywiście, nie tylko elektronu. Doświadczeń takich wykonano później wiele i wszystkie potwierdzają ten wynik.

Dyfuzja

Jan KALINOWSKI

Zapach perfum z otwartej buteleczki po pewnym czasie rozejdzie się po pokoju. Dym z papierosa w powietrzu rozmywa się, a kropla atramentu wpuszczona do wody zabarwi ją. Teoria kinetyczna tłumaczy te zjawiska w następujący sposób. Cząsteczki gazów, cieczy i ciał stałych są w ciągłym ruchu i zderzają się. Rozpatrzmy na przykład dym w powietrzu. Żadna cząsteczka dymu (albo ich grupa) nie porusza się szybko w pewnym ustalonym kierunku, gdyż na skutek zderzeń kierunek jej ruchu ulega ciągłym zmianom. Cząsteczki dymu będą się stopniowo rozchodziły w powietrzu na skutek bezładnej ich wędrówki. Proces tego typu nazywamy dyfuzją. Dyfuzja będzie zachodzić dopóty, dopóki koncentracja cząsteczek jest nierównomierna. To samo dotyczy autodyfuzji – wyrównywania się gęstości cząsteczek w układach jednoskładnikowych. Po dostatecznie długim czasie nastąpi wyrównanie się koncentracji i dyfuzja ustanie.

Proces dyfuzji jest podobny do procesu przewodnictwa cieplnego, które zachodzi, jeśli jest różnica temperatur. Jeśli różnica koncentracji w punktach oddalonych o Δx wynosi $\Delta\rho$, to molekuły z obszaru o większej koncentracji dyfundują do obszaru o mniejszej z szybkością proporcjonalną do $\Delta\rho/\Delta x$. Zmiana liczby molekuł w jednostce czasu będzie też proporcjonalna do powierzchni A, przez którą dyfundują molekuły, tzn.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -AD\frac{\Delta\rho}{\Delta x},$$

gdzie znak minus oznacza, że dyfuzja zachodzi w kierunku przeciwnym do tego, w którym wzrasta ρ. Stała D nosi nazwę współczynnika dyfuzji. Powyższe prawo dyfuzji podał w 1855 r. niemiecki fizjolog Adolf Fick. Równanie przewodnictwa cieplnego ma formalnie taką samą postać, przy podstawieniu $\Delta N \to \Delta Q$ (zmiana ciepła) i $\Delta\rho \to \Delta T$ (różnica temperatur).

Zwróćmy uwagę, że prawo to zostało sformułowane przez fizjologa, a nie fizyka. Dyfuzja substancji odżywczych w wodzie czy też tlenu do krwi w płucach ma przecież podstawowe znaczenie dla organizmów żywych.

Badając procesy dyfuzji można uzyskać ciekawe informacje o dyfundujących molekułach. Rozpatrzymy oddzielnie dyfuzję w gazach i cieczach.

W przypadku gazów rozpatrzymy najprostszy przypadek – autodyfuzję. Zauważmy, że współczynnik dyfuzji ma wymiar L^2/T, tzn. jest mierzony w m^2/s. Jest naturalne oczekiwać, że D będzie zależał od prędkości v dyfundujących cząsteczek. Mamy więc już m/s, potrzebujemy jeszcze czegoś o wymiarze długości. W gazach rozrzedzonych dyfuzja zachodzi szybciej. W rozrzedzonym gazie cząsteczki znajdują się średnio dalej od siebie, tzn. droga między kolejnymi zderzeniami wydłuża się. D może więc zależeć też od długości drogi swobodnej λ. Faktycznie, okazuje się, że $D = \frac{1}{3}v\lambda$. Z kolei według teorii kinetycznej gazów $v \sim \sqrt{T/m}$, więc pomiar D może dostarczyć informacji o masie molekuł. Z tabelki widać, że zależność $D \sim m^{-1/2}$ jest dość dobrze spełniona.

substancja	masa molekularna	temperatura (°C)	D (m^2/s)
H_2	2	0	$6{,}34 \times 10^{-5}$
H_2O	18	8	$2{,}39 \times 10^{-5}$
O_2	32	0	$1{,}78 \times 10^{-5}$
CO_2	44	0	$1{,}39 \times 10^{-5}$
CS_2	76	20	$1{,}02 \times 10^{-5}$

Dla dyfuzji w układach wieloskładnikowych zależność D od parametrów jest bardziej skomplikowana.

Dla dyfuzji w cieczach prosta analiza wymiarowa zawodzi, gdyż jest więcej czynników wpływających na D. W przypadku dużych molekuł kulistych (przypadek interesujący biologów) mechanizm dyfuzji przypomina mechanizm przemieszczania się kuli w cieczy lepkiej. Z doświadczenia otrzymujemy

$$D = \frac{kT}{6\pi a\eta},$$

gdzie k – stała Boltzmanna, a – rozmiar dyfundujących molekuł i η – lepkość cieczy. Tym razem $D \sim m^{-1/3}$, gdyż $m \sim a^3$, tzn. współczynnik dyfuzji jest niezbyt czuły na masę molekuł. Potwierdzają to dane z tabelki dla współczynników dyfuzji w wodzie w temperaturze $t = 20°C$.

molekuła	masa molekularna	D (m^2/s)
H_2O	18	2×10^{-9}
O_2	32	1×10^{-9}
$CO(NH_2)_2$ mocznik	60	$1{,}1 \times 10^{-9}$
$C_6H_{12}O_6$ glukoza	180	$6{,}7 \times 10^{-10}$
$C_{12}H_{22}O_{11}$ sacharoza	342	$5{,}2 \times 10^{-10}$
kwas rybonukleinowy	13 683	$1{,}2 \times 10^{-10}$
hemoglobina	68 000	$6{,}9 \times 10^{-11}$
enzym ureaza	480 000	$3{,}5 \times 10^{-11}$

Zauważmy, że ze znajomości D możemy otrzymać bezpośrednio rozmiary dyfundującej molekuły. Masę molekuły możemy oszacować ze wzoru

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3,$$

gdzie ρ – gęstość suchej substancji, której molekuły dyfundują w cieczy. Gdy molekuły znajdują się w cieczy (wodzie), molekuły cieczy przyklejają się do powierzchni dyfundującej molekuły powiększając efektywnie jej rozmiary. Dla molekuł substancji biologicznych w wodzie doświadczenie mówi, że wynik trzeba poprawić o czynnik $\sim 1,5$, tzn. masa molekuły wyniesie

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3/1,5.$$

Dyfuzja zachodzi też w ciałach stałych. Jest to bardzo powolny proces wywołany ruchami cieplnymi atomów. Najlepiej zbadana jest dyfuzja w germanie i krzemie, gdyż dyfuzję wykorzystuje się tutaj do domieszkowania półprzewodników. Aby przyspieszyć proces dyfuzji, przeprowadza się go w wysokiej temperaturze. W tabelce poniżej podane są współczynniki dyfuzji dla niektórych pierwiastków.

pierwiastek	D (cm^2/s) german w 800°C	krzem w 1300°C
B	4×10^{-13}	2×10^{-11}
Al	–	8×10^{-11}
Ga	1×10^{-13}	$2{,}5 \times 10^{-11}$
In	2×10^{-13}	$6{,}5 \times 10^{-12}$
Ge	8×10^{-14}	5×10^{-4}
P	$6{,}5 \times 10^{-12}$	2×10^{-4}
As	4×10^{-11}	$1{,}5 \times 10^{-12}$
Sb	2×10^{-11}	2×10^{-12}
Bi	–	$16{,}3 \times 10^{-12}$

Dane w tabelkach pochodzą z *Encyklopedii Fizyki*, PWN 1972 i książki J.B. Mariona, *General Physics with Bioscience Essays*, John Wiley & Sons 1979.

Wspominałem, że względem obserwatora na odległym, szybko poruszajacym się kwazarze, przeżyłem już sto pięćdziesiąt lat. Teraz zaś okazuje się, że ważę tam ponad dwieście kilogramów. Nie jest to ponętny obraz, ale na szczęście nie zależy mi aż tak bardzo na opinii odległego kwazarowca.

Przypomnijmy sobie, do jakich to wniosków doprowadziły nas doświadczenia omawiane w ostatnich trzech artykułach. Oto one:

1. Prędkość światła nie zależy od prędkości źródła lub obserwatora.
2. Czas w układzie poruszającym się płynie wolniej niż w spoczynku.
3. Długość obiektu poruszającego się względem obserwatora jest mniejsza niż w układzie, w którym ten obiekt spoczywa.
4. Masa ciała poruszającego się względem obserwatora jest większa niż wtedy, gdy ciało spoczywa.

Wszystko to razem doprowadziło fizyków do wniosku, że żyjemy nie w przestrzeni trójwymiarowej, lecz w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Tu jednak kończą się doświadczenia, a zaczynają rozważania teoretyczne, których obiecałem unikać.

Unikam rozważań teoretycznych i podawania wzorów. Te każdy zainteresowany Czytelnik może znaleźć w dowolnym podręczniku fizyki, który zajmuje się tymi zagadnieniami. Moim celem nie było, oczywiście, nauczenie Państwa szczególnej teorii względności, ale pokazanie, ile materiałów do przemyśleń dostarczają nam doświadczenia, które możemy wyjaśnić na jej podstawie. Takich doświadczeń można by wyliczyć jeszcze wiele. Nie są to doświadczenia z życia codziennego, ale nie są to też czysto akademickie doświadczenia nikomu do niczego nieprzydatne. Bez szczególnej, a również ogólnej teorii względności trudno by zrozumieć ruch ciał niebieskich, szczególnie przy osiąganych dokładnościach pomiarów. A to już ma praktyczne znaczenie dla astronautów.

Chciałbym Państwu polecić coś z lektury. Osobiście bardzo cenię wydaną w serii *Biblioteczka Delty* broszurę Andrzeja Szymachy i Piotra Lasoty *Teoria względności*. Książeczka jest dawno wyczerpana, ale na pewno można ją znaleźć w niejednej bibliotece. Kto bardziej dociekliwy, może zajrzeć do uniwersyteckiego podręcznika napisanego przez A. K. Wróblewskiego i J. Zakrzewskiego *Wstęp do fizyki*. Znajdzie tam wiele opisów doświadczeń, o których mówiłem.

Następnym razem wrócimy do bardziej przyziemnych spraw i zaproponuję Państwu zamrażanie wody w lodówce.