Skąd się bierze matematyka?

Latem 1900 roku odbyła się w Paryżu Wystawa Światowa. Z tej okazji odbył się też II Międzynarodowy Kongres Matematyków. Uczestniczyło w nim 226 matematyków z 23 krajów. W dniu 8 sierpnia na wspólnym posiedzeniu sekcji V (historii i bibliografii) oraz VI (dydaktyki i metodologii) tego kongresu odczyt wygłosił David Hilbert. Odczyt nosił tytuł „Problemy matematyczne".

Hilbert rozpoczyna wykład od zademonstrowania, jak rozwiązywanie konkretnych zadań stawało się źródłem powstawania nowych dyscyplin matematycznych, tworzenia nowych pojęć, stawiania nowych pytań. Wymienia problem brachistochrony (krzywej najszybszego spadku) i pokazuje, jak z rozwiązywania tego zadania narodził się rachunek wariacyjny. Przypomina, jak rozwiązywanie Wielkiego Twierdzenia Fermata (nie udowodnionego po dzień dzisiejszy) stworzyło całą nowoczesną algebrę, a w szczególności teorię pierścieni. Przytacza problem trzech ciał (pytanie o ich ruch pod wpływem wzajemnego przyciągania) i wskazuje, jak z prób rozwiązywania tego zadania narodziło się szereg metod w teorii równań różniczkowych. Wspomina o tym, jak poszukiwania geodezyjnych („najprostszych" linii na powierzchni) dały początek geometrii różniczkowej. Wskazuje, jak badania symetrii wielościanów dały początek tak teorii grup i teorii niezmienników, jak też krystalografii.

I tu stawia tezę, że rozwiązywanie konkretnych zadań jest najważniejszym źródłem energii matematyków, stanowi najgłębszy i najskuteczniejszy bodziec do podejmowania przez nich badań. Tak jego zdaniem powstaje matematyka.

Następnie stawia konkretne problemy, których rozwiązanie (jego zdaniem) powinno popchnąć matematykę naprzód, dać jej nowy zastrzyk energii, spowodować stworzenie nowych metod, uproszczenie starych, wywołać narodziny nowych jej gałęzi. Wymienia blisko trzydzieści konkretnych zadań (ciekawe, że nie wiadomo, ile ich było) – na część z nich obecni na sali matematycy znają odpowiedź. Pozostają 23 problemy do rozwiązania.

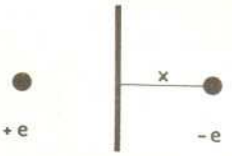
Ci, którzy utrzymują bliższe kontakty z matematyką-nauką, wiedzą, że cała właściwie dwudziestowieczna matematyka to rozwiązywanie problemów Hilberta. Pierwszy z nich został rozwiązany jeszcze w 1900 roku. Kiedy został rozwiązany ostatni, powiedzieć nie można, bo w trakcie rozwiązywania problematyka rozrastała się i rozrasta nadal. W ramach np. VI problemu Hilberta zyskaliśmy aksjomatykę rachunku prawdopodobieństwa (Kołmogorow, 1933) i przesunięcie go z fizyki do matematyki. W ramach tegoż problemu Emma Noether udowodniła twierdzenie wiążące symetrie z prawami zachowania, czyniąc z grup Liego podstawowe narzędzie fizyki. Rozwiązaniem I problemu Hilberta jest wykazanie niezależności hipotezy continuum od aksjomatów teorii mnogości (Cohen, 1963). Rozwiązaniem z kolei X problemu jest wykazanie, że nie istnieje algorytm badający istnienie rozwiązań choćby tylko wielomianowych równań diofantycznych (w liczbach całkowitych). Nie sposób zresztą wymienić sensownej, krótkiej listy takich rezultatów – takie krótkie listy mają postać grubych książek. Nic dziwnego: mówią o całej dwudziestowiecznej matematyce.

Stosunek Hilberta do roli rozwiązywania zadań w rozwoju matematyki nie był, rzecz jasna, podzielany przez wszystkich (korzystających przecież z jego, zadaniami wyznaczonej, drogi badawczej). Jednak ci, którzy poszukiwali patrona międzynarodowej nagrody dla organizatorów konkursów zadaniowych, nie mieli wątpliwości – to powinien być David Hilbert. I najwyższe odznaczenie przyznawane przez *World Federation of National Mathematical Competitions* to medal Hilberta. Odznaczony został nim w tym roku prowadzący Ligę – Klub 44M – Marcin Kuczma. To wielki sukces naszego kolegi i wielki zaszczyt dla *Delty*, że nasze zadania ligowe (choć pisane w mało znanym narzeczu), a przede wszystkim liczne grono uczestników Ligi, znalazły tak wielkie uznanie.

Gratulujemy!

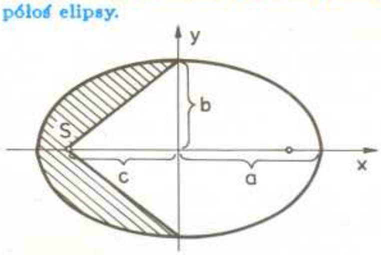
Redakcja

Rozwiązanie zadania F 339. Niech m oznacza masę elektronu. Korzystając z metody obrazu stwierdzamy, że lustrzany obraz ładunku pojawi się po przeciwnej stronie płaszczyzny.



Płaszczyzna będzie przyciągać elektron z siłą $F = \frac{ke^2}{4x^2}$. W polu siłowym typu $F = \frac{A}{r^2}$ ciała poruszają się po elipsach i spełnione jest trzecie prawo Keplera $\frac{a^3}{T^2} = \frac{A}{m4\pi^2}$, gdzie a jest wielką półosią elipsy, a T czasem obiegu. W naszym przypadku tor elektronu jest odcinkiem, który jest szczególnym przypadkiem elipsy, gdzie $a = \frac{x}{2}$, zaś czas spadku na płaszczyznę jest równy $t = \frac{T}{2}$. Podstawiając r, T oraz $A = \frac{ke^2}{4}$ do prawa Keplera wyznaczamy ostatecznie czas $t = \pi\sqrt{\frac{mx^3}{2ke^2}} = 140$ s.

Rozwiązanie zadania F 340. Korzystamy z drugiego prawa Keplera, które mówi, że prędkość polowa komety jest stała. Pole całej elipsy jest równe πab, gdzie a, b oznaczają wielką i małą półoś elipsy.



Czas pokonywania połowy trajektorii bliższej Słońcu jest proporcjonalny do pola zakreślonego przez promień wodzący komety i jest on równy

$$t = \frac{S}{\pi ab}T = \frac{\frac{1}{2}\pi ab - bc}{\pi ab}T = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}e\right)T,$$

gdzie $e = \frac{c}{a}$ jest mimośrodem elipsy. Ostatecznie $t = 14,5$ roku.