Różnymi sposobami

Tożsamość $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ wynika bezpośrednio ze wzoru dwumianowego Newtona zastosowanego do wyrażenia $(1+1)^n$. Można ją też uzyskać obliczając na dwa różne sposoby liczbę podzbiorów zbioru $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pierwszy sposób: mamy 1 zbiór pusty, $\binom{n}{1}$ podzbiorów jednoelementowych, $\binom{n}{2}$ dwuelementowych itd. Łącznie mamy $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$ podzbiorów. Drugi sposób: Każdemu podzbiorowi A możemy przyporządkować jednoznacznie n elementowy ciąg zerojedynkowy. Mianowicie, jeśli $x_i \in A$, to na i-tym miejscu piszemy 1, a jeśli nie, to piszemy 0. Takich ciągów jest 2^n.

Trudniejsze jest obliczenie sumy
$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n},$$
chociaż, jak się okazuje, jest na to wiele sposobów. My pokażemy trzy bardzo różne.

1. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej $1 \le k \le n$
$$k\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=$$
$$=n\binom{n-1}{k-1}.$$
W efekcie
$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=$$
$$=n\left(1+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right)=n2^{n-1}.$$

2. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi
$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n.$$
Różniczkując obie strony tej równości względem x dostajemy
$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\ldots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$
Stąd, po podstawieniu $x=1$, wynika, że
$$n2^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}.$$

3. Niech X będzie zmienną losową określającą liczbę sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $1/2$. Wartość oczekiwana EX zmiennej X wynosi
$$\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots+n\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Zmienną X można przedstawić w postaci sumy zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$, z których k-ta przyjmuje wartość 1, jeśli w k-tej próbie zanotowaliśmy sukces, i 0, gdy porażkę. Wartość oczekiwana sumy zmiennych jest równa sumie wartości oczekiwanych tych zmiennych. Zatem
$$EX=EX_1+EX_2+\ldots+EX_n.$$
Zauważmy jednak, że $EX_1=\ldots=EX_n=\frac{1}{2}$. W efekcie
$$\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots+n\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\frac{1}{2},$$
a więc
$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

Edmund PUCZYŁOWSKI

Rozwiązanie zadania M 640. Rozpatrzmy trójkąt, którego jeden bok ma długość $a \in [0,1]$, drugi zaś $b \in [1,2]$. Pole takiego trójkąta jest największe, gdy oba boki są prostopadłe, $a=1$ i $b=2$. Trzeci bok ma wtedy długość $\sqrt{5} \in [2,3]$. Zatem poszukiwany trójkąt to trójkąt prostokątny o bokach $1, 2, \sqrt{5}$.

Rozwiązanie zadania M 641. Popatrzmy na k-tego z kolei siódmoklasistę (po przestawieniu): ma on w swojej klasie $(k-1)$ wyższych kolegów. Za każdym z nich pierwotnie stał wyższy ośmioklasista, zatem ośmioklasistów wyższych od naszego wybranego siódmoklasisty jest (co najmniej!) k. Wynika stąd, że po przestawieniu stojący za nim ośmioklasista będzie wyższy.

Rozwiązanie zadania M 642. Teza tego zadania wynika bezpośrednio z zadania **641**. Jeśli bowiem popatrzymy tylko na dwie kolumny (przed przestawieniem), i-tą i j-tą, $j < i$, to żołnierz stojący w j-tej kolumnie jest wyższy od swojego kolegi stojącego w tym samym szeregu, ale w i-tej kolumnie – bo szeregi są ustawione według wzrostu. Jeśli teraz ustawimy kolumny według wzrostu, to – jak wynika z zadania **641** – żołnierz stojący w j-tej kolumnie nadal będzie wyższy od swojego kolegi stojącego w tym samym szeregu, ale w i-tej kolumnie. Tak więc szeregi pozostaną uporządkowane według wzrostu.