Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1992

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Zadania z matematyki nr 243, 244

Redaguje Marcin E. KUCZMA

243. Na każdym polu szachownicy stoi sześcian, którego jedna ściana jest czarna, a pozostałe białe. Chcemy, aby wszystkie czarne ściany znalazły się na górze. Można tylko jednocześnie obracać wszystkie sześciany dowolnie wybranego rzędu poziomego lub pionowego wokół ich wspólnej osi obrotu. Wskazać algorytm. (...wspomnienie „kostki Rubika"...)

244. Na płaszczyźnie dany jest punkt P. Wyznaczyć kres górny pól trójkątów ABC o tej własności, że $|PA|+|PB|+|PC|=1$.

Zadanie 244 zaproponował pan Adam Czornik z Bytomia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1992

Przypominamy treść zadań:

239. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyć kres dolny i kres górny wartości wyrażenia
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}$$
po wszystkich układach liczb dodatnich $(a_1, \ldots, a_n)$; numeracja cykliczna $(a_{n+1} := a_1,\ a_{n+2} := a_2)$.

240. Znaleźć wszystkie pary (x,y) spełniające równanie
$$5y^2 - 2x^2 + 4xy - 23x - 27y + 12 = 0,$$
w których x jest dowolną liczbą całkowitą, a y – liczbą pierwszą.

239. Weźmy dowolne liczby $a_1, \ldots, a_n$ i oznaczmy ich sumę przez s. Dla każdego $k \in \{1,\ldots,n\}$ zachodzą nierówności
$$\frac{a_k}{s} \leq \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} =$$
$$= 1 - \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} - \frac{a_{k+2}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq$$
$$\leq 1 - \frac{a_{k+1}}{s} - \frac{a_{k+2}}{s}\,.$$
Stąd przez zsumowanie otrzymujemy nierówność podwójną
$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq n-2\,.$$
Oszacowań tych nie da się już poprawić; przyjmując bowiem $a_k = t^k$, gdzie t jest dowolnie wybraną liczbą dodatnią, uzyskujemy wartość rozważanej sumy równą
$$\frac{n-2}{1+t+t^2} + \frac{t^{n-2}}{1+t^{n-2}+t^{n-1}} + \frac{t^{n-1}}{1+t+t^{n-1}}\,.$$
Przy t dążącym do zera oraz do nieskończoności uzyskane wyrażenie dąży odpowiednio do $n-2$ oraz do 1. Zatem liczby 1 i $n-2$ są poszukiwanymi kresami.

240. Przekształcamy dane równanie do postaci
$$y^2 = (2x + 2y - 1)(-x + 3y - 12)\,.$$
Oznaczmy czynniki iloczynu po prawej stronie odpowiednio przez u i v. Ponieważ y jest liczbą pierwszą, (u,v) musi być jedną z następujących par:
$$(1,y^2),\ (y,y),\ (y^2,1),\ (-1,-y^2),\ (-y,-y),\ (-y^2,-1)\,.$$
Każda z tych możliwości wyznacza układ dwóch równań z niewiadomymi x, y. Jedynie drugi i czwarty układ daje rozwiązanie zgodne z postulatami zadania:
$$x=-2,\ y=5 \qquad \text{oraz} \qquad x=-2,\ y=2\,.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 229 (WT=1,11) i 230 (WT=3,17) z numeru 11/1991

Józef Siwy	– Łaziska Górne	42,42
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,98
Henryk Kornacki	– Augustów	38,22
Janusz Olszewski	– Suwałki	37,21
Marek Prauza	– Poraj	37,17
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	36,49

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 127 (WT=2,77) i 128 (WT=2,67) z numeru 11/1991

Adam Sikorski	– Lublin	44,43
Paweł Perkowski	– Szczecin	38,66
Tomasz Wietecha	– Tarnów	21,31
Przemysław Gworys	– Częstochowa	17,87
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	15,30

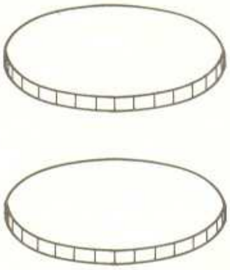
Gratulacje dla p. Sikorskiego, który kończąc trzecią rundę został trzecim w historii Ligi **44 F** Weteranem. Przy okazji przypominamy nazwiska poprzednich Weteranów: Piotr Bała z Torunia i Dzierżysław Lipniacki z Lublina.

Zadania z fizyki nr 141, 142

Redaguje Jerzy B. BROJAN

141. Wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczonych jest nieskończenie wiele ładunków punktowych dodatnich i ujemnych na przemian, o tej samej wartości bezwzględnej. Zbadać (analitycznie lub numerycznie), jak szybko maleje natężenie pola elektrycznego w miarę oddalania się od prostej. Rozważyć obie składowe pola – równoległą i prostopadłą do prostej.

142. Zasada symetrii zwierciadlanej (nie obowiązująca w oddziaływaniach słabych cząstek elementarnych) głosi, że każde zjawisko fizyczne ma swój odpowiednik w analogicznym zjawisku „zwierciadlanym" – innymi słowy, obserwując przebieg doświadczenia nie możemy wywnioskować, czy widzimy je bezpośrednio, czy odbite w lustrze. Które z następujących hipotetycznych zjawisk są zgodne z zasadą symetrii zwierciadlanej, a które nie?



a) Dwa płaskie krążki, wykonane z pewnego materiału i ustawione równolegle (rys.) przyciągają się, gdy obracają się w tę samą stronę, a odpychają, gdy obracają się w przeciwne strony.
b) Krążek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
c) Krążek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w którąkolwiek stronę, a nie oddziałuje z nim, gdy jest nieruchomy.
d) Krążek przyciąga ładunek dodatni, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
e) Krążek przyciąga biegun N magnesu, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
Krążki nie mają w swojej budowie wyróżnionej żadnej skrętności (np. nie są wykonane z cukru lewoskrętnego).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1992

Przypominamy treść zadań:

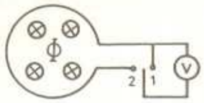
137. Przez wnętrze cewki C przechodzi stały strumień Φ pola magnetycznego wytworzonego przez magnes stały lub elektromagnes. Cewka obraca się ze stałą prędkością kątową ω, nawijając drut z bębna B (i zwiększając w ten sposób liczbę zwojów). Woltomierz V jest dołączony jedną końcówką ślizgową do pierścienia P, a drugą do drutu. Obliczyć wskazania woltomierza.

138. Dwie równoległe nici odległe o d są napięte, każda siłą F. Do nici są prostopadle przymocowane jednorodne pręty w odległości wzajemnej b, każdy o masie m i długości l. Środki prętów są w połowie odległości między nićmi. Obliczyć prędkość fali torsyjnej wzdłuż nici (fala ta polega na obrocie kolejnych prętów w płaszczyźnie prostopadłej do nici).

137. Odpowiedź może się wydać paradoksalna: woltomierz wskazuje zero, choć pozornie ze wzoru

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\Phi) = -\Phi\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$$

(gdzie n – liczba zwojów) wynikałoby, że $\mathcal{E} \neq 0$. Zauważmy jednak, że w zadaniu nie występuje zmienne pole magnetyczne (związane z wirowym polem elektrycznym) ani też przewodnik nie przecina w swoim ruchu linii pola magnetycznego. Dla ułatwienia dyskusji przyjmijmy, że w pierścieniu P występuje przerwa – nie zmienia to warunków fizycznych zadania, gdyż strumień Φ przez pierścień jest stały i nie ma w tym obwodzie siły elektromotorycznej. Łatwo wtedy wykazać, że dopóki przerwa nie minie styku ślizgowego, strumień objęty przez drut cewki nie zmienia się, natomiast minięcie styku przez przerwę jest równoważne przełączeniu styku z położenia 1 do położenia 2, co, oczywiście, nie spowoduje wychylenia woltomierza.



138. Oznaczmy kąt obrotu i-tego pręta względem wybranego kierunku przez α_i. Nierówność kątów α_i oznacza, że każda z nici tworzy linię łamaną na powierzchni walca o średnicy d. Jeśli różnice między kolejnymi kątami są małe, to rzut odcinka łamanej od i-tego do $(i+1)$-szego pręta na płaszczyznę prostopadłą do osi walca jest dany wyrażeniem

$$\frac{d}{2}(\alpha_i - \alpha_{i+1}).$$

Odpowiednie przesunięcie wzdłuż osi walca wynosi b; ponieważ nić jest napięta siłą F, więc składowa tej siły w płaszczyźnie prostopadłej do osi jest równa

$$F\frac{d}{2b}(\alpha_i - \alpha_{i+1}).$$

Taka sama siła jest wywierana przez drugą nić, a łączny moment sił wynosi

$$F\frac{d^2}{2b}(\alpha_i - \alpha_{i+1}).$$

Na i-ty pręt działają dwa momenty dane powyższym wyrażeniem – ze strony odcinków nici do pręta o numerze $i+1$ i do pręta o numerze $i-1$. Przyrównując wypadkowy moment sił do iloczynu $I\epsilon_i$ (gdzie I – moment bezwładności pręta, $\epsilon_i = \mathrm{d}^2\alpha_i/\mathrm{d}t^2$ – przyspieszenie kątowe) uzyskujemy równanie falowe

$$I\epsilon_i = F\frac{d^2}{2b}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} - 2\alpha_i). \tag{1}$$

Dalsze postępowanie jest analogiczne jak np. przy wyprowadzeniu prędkości fali poprzecznej na nici obciążonej punktowymi masami. Załóżmy, że rozwiązanie ma postać impulsu falowego rozchodzącego się bez zmiany kształtu

$$\alpha_i = f(z_i - vt), \tag{2}$$

gdzie z_i – położenie i-tego pręta na osi z skierowanej wzdłuż nici, v – prędkość fali. Wyrażenie $\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} - 2\alpha_i$ dla małych różnic można przybliżyć przez

$$\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} - 2\alpha_i = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}z^2}\cdot b^2 = f''\cdot b^2.$$

Ponieważ lewa strona równania (1) jest równa $Iv^2 f''$, więc widzimy, że wyrażenie (2) spełnia równanie (1), jeśli tylko

$$Iv^2 = \frac{1}{2}Fd^2b, \quad \text{tzn.} \quad v = d\sqrt{\frac{Fb}{2I}}.$$

Ostateczne rozwiązanie otrzymujemy podstawiając moment bezwładności pręta $I = \frac{1}{12}ml^2$

$$v = \frac{d}{l}\sqrt{\frac{6Fb}{m}}.$$