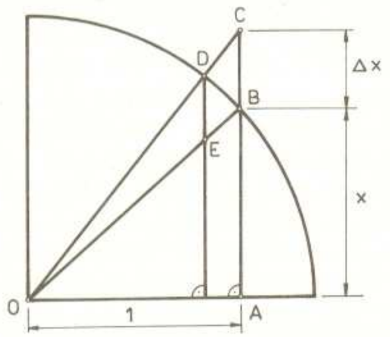
Jak obliczyć elementarnie pochodną $\operatorname{arctg} x$?

Zacznijmy od przypomnienia, co to jest $\operatorname{arctg} x$. Otóż dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jeden taki kąt $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, że $\operatorname{tg} \alpha = x$. Ten właśnie kąt oznaczamy przez $\operatorname{arctg} x$. Czyli, innymi słowy, $\operatorname{arctg} x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $\operatorname{tg} x$ określonej na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Przypomnijmy, jak się zwykle oblicza pochodną funkcji $\operatorname{arctg} x$. Najpierw obliczamy pochodną funkcji $\sin x$, potem $\cos x$, dalej pochodną ilorazu $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i w końcu pochodną $\operatorname{arctg} x$ jako pochodną funkcji odwrotnej. Okropność! Jakie to długie i skomplikowane.

Pokażemy, jak można obliczyć tę pochodną bezpośrednio geometrycznie. Poniższa metoda została podana przez Normana Schaumbergera. Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Zakładamy, że $x > 0$. Zauważmy, że z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OAB wynika, że promień okręgu jest równy $\sqrt{1+x^2}$.

Otóż

$$(\spadesuit) \qquad \text{Pole } \triangle ODE < \text{Pole wycinka } ODB < \text{Pole } \triangle OCB\,.$$

Oczywiście,

$$\text{Pole } \triangle OCB = \text{Pole } \triangle OCA - \text{Pole } \triangle OBA = \frac{\Delta x}{2}\,.$$

Trójkąty OCB i ODE są podobne, więc

$$\text{Pole } \triangle ODE = \left(\frac{OD}{OC}\right)^2 \cdot \text{Pole } \triangle OCB = \frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}\,.$$

Ponadto bezpośrednio z definicji arctg wynika, że $\angle BOA = \operatorname{arctg} x$ i $\angle COA = \operatorname{arctg}(x+\Delta x)$. Skąd

$$\text{Pole wycinka } ODB = \frac{1}{2}(1+x^2)(\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x)\,.$$

Korzystając z $(\spadesuit)$ otrzymamy

$$\frac{1}{1+(x+\Delta x)^2} < \frac{\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} < \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Przechodząc do granicy przy $\Delta x \to 0$ uzyskujemy wzór na pochodną

$$(\operatorname{arctg} x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Łatwo zauważyć, że dla $x < 0$ pochodna wyraża się tym samym wzorem. Wynika to z zauważenia, że $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$. A teraz zadanie dla Czytelników. Jak geometrycznie wyprowadzić wzory na pochodne innych funkcji cyklometrycznych?

Opracował Piotr HAJŁASZ

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (IV)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Czy długość jednego metra może wynosić pół metra?

Tomasz HOFMOKL

W moim cyklu artykułów opowiadam o doświadczeniach, których wyniki są na tyle zaskakujące, że zdają się przeczyć zdrowemu rozsądkowi. W tej konfrontacji przegrywa na ogół zdrowy rozsądek i jesteśmy zmuszeni do zmiany naszych poglądów na naturę zjawisk przyrodniczych.

Przypomnę, że w poprzednich opowieściach mówiłem o doświadczeniach wykazujących, że w układzie poruszającym się, na przykład w samolocie, czas płynie wolniej niż w układzie nieruchomym – na przykład na lotnisku. Okazało się również, że w próżni światło, a mówiąc ogólniej, fala elektromagnetyczna, porusza się ze stałą prędkością niezależną od prędkości źródła lub obserwatora. Mówiliśmy, że ta prędkość, równa w przybliżeniu trzystu tysiącom kilometrów na sekundę, jest największą prędkością, z jaką można przesyłać sygnał, informację.

Dziś w tytule artykułu mamy również prowokujący bezsens: czy metr może równać się połowie metra? I znowu okazuje się, że tak.

Rozpocznijmy naszą opowieść od początku bieżącego stulecia. Już w roku 1900 wiedziano, że atmosfera ziemska jest ośrodkiem przewodzącym ładunki elektryczne. Między innymi zauważono, że naładowany elektroskop (w najprostszej postaci są to dwa listki cynfolii na izolowanej pałeczce) po pewnym czasie rozładowuje się. W roku 1912 V. F. Hess wykazał obserwacyjnie, że przewodnictwo atmosfery wzrasta wraz z wysokością. Im wyżej umieścimy naładowany elektroskop, tym szybciej się rozładuje. Przewodnictwo atmosfery zależy od stopnia zjonizowania jej atomów. Znaczy to, że im wyżej, tym częściej spotykamy atomy pozbawione jednego lub kilku elektronów, a tym samym naładowane elektrycznie. Przyczyną może być jakiś czynnik zewnętrzny, który obdziera atomy z elektronów. Hess wysunął hipotezę, że istnieje jakieś pozaziemskie