# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

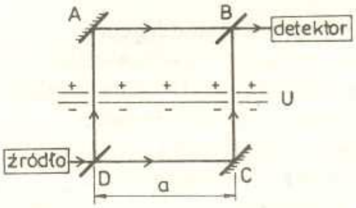
**Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana.**

**Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.**

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1992

Przypominamy treść zadań:

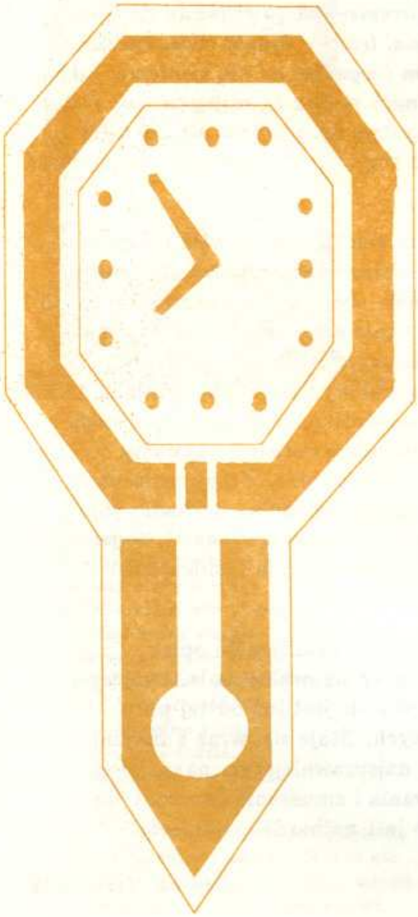



**135.** Na rysunku mamy schemat interferometru, w którym wiązka nierelatywistycznych elektronów o energii $E$ pada na zwierciadło półprzepuszczalne $D$, skąd część wiązki biegnie dalej drogą $DAB$, a część drogą $DCB$. Na odcinkach pionowych energia kinetyczna elektronów zmienia się w wyniku przejścia do obszaru o innym potencjale. Za zwierciadłem półprzepuszczalnym $B$ rozdzielone wiązki nakładają się, a obraz interferencyjny jest rejestrowany przez detektor. O ile prążków przesunie się obraz interferencyjny, gdy różnicę potencjałów zwiększymy od zera do $U$?

**136.** Gdy temperatura powietrza atmosferycznego szybko maleje w miarę wzrostu wysokości, występuje intensywna konwekcja (pionowe ruchy mas powietrza), natomiast gdy temperatura maleje powoli lub rośnie, konwekcja nie występuje. Wyjaśnić przyczynę tej zależności i obliczyć minimalny spadek temperatury suchego powietrza przy wzroście wysokości o 100 m, dla którego jeszcze występuje konwekcja.

**135.** Przesunięcie fazy jednej wiązki względem drugiej wynika stąd, że po wprowadzeniu różnicy potencjałów energia elektronów na odcinkach poziomych przestaje być jednakowa: na odcinku $DC$ elektrony mają energię $E$ i długość fali $\lambda = \frac{h}{p}$, a na odcinku $AB$ energię $E_1 = E + eU$ i długość fali $\lambda_1 = \frac{h}{p_1}$. Szukana liczba przesuniętych maksimów wynosi

$$n = \frac{a}{\lambda_1} - \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{h}(p_1 - p) = \frac{a}{h}\left(\sqrt{2m(E+eU)} - \sqrt{2mE}\right).$$



**136.** Powietrze wznosząc się na wysokość wyższą o $\Delta h$ rozpręża się, tzn. ciśnienie zmniejsza się o

$$\Delta p = \rho g \Delta h .$$

W realnych warunkach mamy do czynienia z ruchami mas powietrza o rozmiarach kilkudziesięciu do kilkuset metrów, zatem można pominąć wymianę ciepła z otoczeniem. Rozprężeniu adiabatycznemu towarzyszy spadek temperatury $\Delta T$. Z równania przemiany adiabatycznej (Poissona) i równania Clapeyrona można wyprowadzić związek między małymi przyrostami $\Delta p$ i $\Delta T$.

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p}{p}.$$

Podstawiając $\Delta p = \rho g \Delta h$ i $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ (gdzie $\mu$ – średnia masa molowa powietrza, równa około 29 g) mamy

$$(*) \qquad \Delta T = \frac{\mu g \Delta h}{C_p}.$$

Jeśli wznoszący się do góry „bąbel" powietrza okaże się cieplejszy od swego otoczenia, to będzie też miał mniejszą gęstość i przesunie się dalej do góry. Taka sytuacja sprzyja więc ruchom konwekcyjnym. Gdy natomiast „bąbel" będzie miał temperaturę niższą, to wskutek większej gęstości zatrzyma się i zawróci – czyli konwekcja nie wystąpi. Graniczne tempo spadku temperatury otrzymujemy ze wzoru $(*)$. Podstawiając $\mu = 0,029$ kg, $g = 9,8$ m/s$^2$, $\Delta h = 100$ m i $C_p = \frac{7}{2}R = 29,1$ J/K (azot i tlen są gazami dwuatomowymi) mamy

$$\Delta T = \frac{0,029 \cdot 9,8 \cdot 100}{29,1}\,\mathrm{K} = 0,98\,\mathrm{K}.$$

Obliczenia te są prawidłowe tylko dla powietrza dostatecznie suchego, aby nie wystąpiło skraplanie pary wodnej przy oziębieniu.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1992

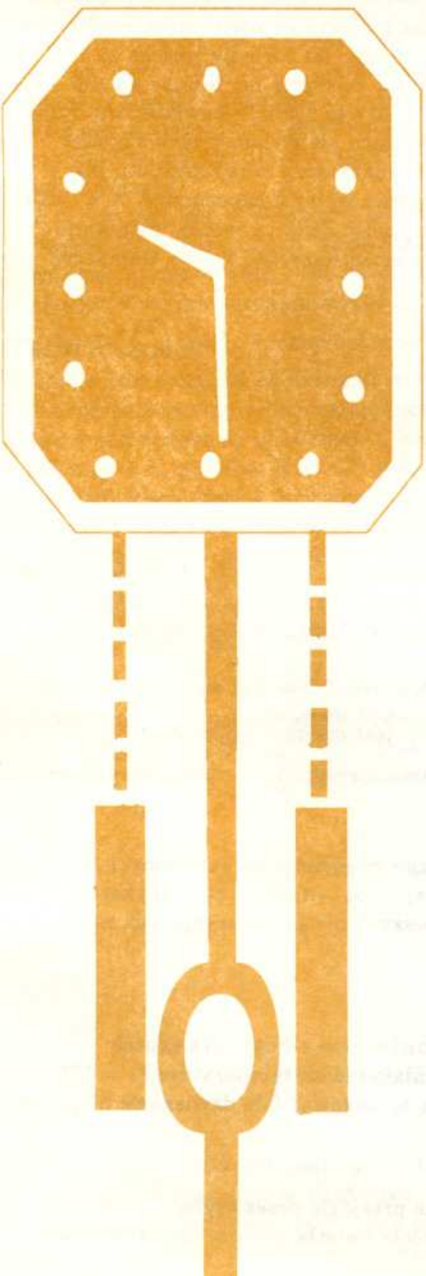
Przypominamy treść zadań:

**237.** Wyznaczyć wszystkie czwórki dodatnich liczb całkowitych $(x, y, u, v)$ spełniających równanie $x^{u+v} + y = x^u y^v$.

**238.** Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $(a_n)$ danego wzorem rekurencyjnym: $a_0 = 44$, $a_{n+1} = 2^{1-a_n}$ dla $n \geq 1$.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 227 ($WT$=3,11) i 228 ($WT$=1,53)
z numeru 4/1991

| | | |
|---|---|---|
| Józef Siwy | – Łaziska Górne | 42,42 |
| Henryk Kornacki | – Augustów | 37,22 |
| Marek Prauza | – Poraj | 36,06 |
| Mirosław Matlęga | – Skoczów | 35,79 |



**237.** Jeśli liczby całkowite $x, y, u, v \geq 1$ spełniają dane równanie, to $y$ dzieli się przez $x$. Niech $y = qx$ ($q$ naturalne). Przekształcamy:

$$\begin{aligned} q^v &= x^{-v}y^v = x^{-v}\left(x^u y^v - x^{u+v}\right)^v = \\ &= x^{-v}\left(x^u (qx)^v - x^{u+v}\right)^v = x^{-v}\left(x^{u+v}(q^v - 1)\right)^v = \\ &= x^{v(u+v-1)}\left(q^v - 1\right)^v. \end{aligned}$$

Otrzymana równość oznacza, że $q^v = 2$ oraz $x^{v(u+v-1)} = 2$. Stąd

$$v = 1, \quad u = 1, \quad x = 2, \quad y = 4.$$

Ta czwórka spełnia równanie i jest jego jedynym rozwiązaniem.

**238.** Wzór definiujący ciąg $(a_n)$ ma postać $a_{n+1} = f(a_n)$, gdzie $f(x) = 2^{1-x}$. Ponieważ $f(x) < 1$ dla $x > 1$ oraz $f(x) > 1$ dla $x < 1$, zatem jedna z liczb $a_1$, $a_2$ jest $\geq 1$. [Aby ciąg był jednoznacznie określony, wzór $a_{n+1} = f(a_n)$ powinien obowiązywać dla $n \geq 0$, nie tylko dla $n \geq 1$; skoro jednak (omyłkowo) podano $n \geq 1$, to nie znamy wartości $a_1$.] Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $a_2 \geq 1$. Gdy $a_2 = 1$, ciąg jest stały ($a_n = 1$ dla $n \geq 2$). W dalszym ciągu zakładamy, że $a_2 > 1$. Wykażemy, że ciąg $a_2, a_4, a_6, \ldots$ jest malejący. Wystarczy w tym celu udowodnić, że

$$f\big(f(x)\big) < x \qquad \text{dla} \quad x > 1. \tag{1}$$

Jest to równoważne temu, że

$$1 - \log_2 x < 2^{1-x} \qquad \text{dla} \quad x > 1. \tag{2}$$

Dla $x \geq 2$ nierówność zachodzi (lewa strona ujemna, prawa dodatnia). Dla $x \in (1; 2)$ przepisujemy (2) w równoważnej postaci

$$\log_2\big(1 - \log_2 x\big) < 1 - x,$$

czyli

$$\ln\left(1 - \frac{\ln x}{\ln 2}\right) < (1 - x)\ln 2. \tag{3}$$

Dla wszystkich liczb $t > -1$ zachodzi znana nierówność $\ln(1 + t) \leq t$. Stąd

$$\ln\left(1 - \frac{\ln x}{\ln 2}\right) \leq -\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Zależność (3) będzie więc udowodniona, jeśli wykażemy, że dla $x \in (1; 2)$ mamy

$$-\frac{\ln x}{\ln 2} < (1 - x)\ln 2,$$

czyli

$$\ln x + (\ln 2)^2(1 - x) > 0. \tag{4}$$

Lewa strona (4) przedstawia funkcję ściśle wklęsłą, przyjmującą na krańcach przedziału $\langle 1; 2\rangle$ wartości nieujemne. Stąd słuszność (4) dla $x \in (1; 2)$, więc i słuszność (1). To zaś dowodzi, że ciąg $(a_{2k})$ jest malejący; istnieje zatem $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} =: \xi \geq 1$. Przechodząc do granicy w równości $a_{2k+2} = f\big(f(a_{2k})\big)$ otrzymujemy związek $\xi = f\big(f(\xi)\big)$, z którego wobec (1) wnosimy, że $\xi = 1$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że $a_{2k+1} = f(a_{2k}) \longrightarrow f(\xi) = f(1) = 1$. Ostatecznie więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ (niezależnie od wartości wyrazu początkowego).

---

Zacytujmy fragment z książki Serge Langa *Algebra* (PWN 1984).

„Wziąć dowolny podręcznik do algebry homologicznej i udowodnić wszystkie twierdzenia nie zaglądając do dowodów podanych w tym podręczniku. Algebra homologiczna została wynaleziona przez Eilenberga i MacLane'a. Ogólna teoria kategorii (tj. teoria strzałek) jest ogólnie znana pod nazwą *nonsensu abstrakcyjnego* (termin pochodzi od Steenroda)."

Tekst ten został opatrzony dwoma przypiskami redakcji:
(1) Radzimy pominąć te ćwiczenia przy pierwszym czytaniu.
(2) Należy zauważyć, że termin *nonsens abstrakcyjny* ma w książce znaczenie dodatnie i używany jest dalej zupełnie poważnie.